







Fabiani



Biblioteka Instytutu Fizyki



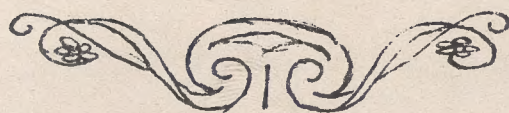
1802017053



Wykłady uniwersyteckie.

# MECHANIKA

według wykładów  
Prof. M. SMOLUCHOWSKIEGO  
w Uniwersytecie lwowskim  
roku akad. 1911/12



LWÓW  
Nakładem KÓŁKA MATEMAT-FIZYCZNEGO.

Wszelkie prawa zastrzeżone.





G-25.313

czyt.



## Wstęp.

### Historyczne uwagi.

Mechanikę uważa się zwykle za podstawę fizyki teoretycznej i od niej się rozszerzają naukę fizyki zaczyna. Istotnie we wszystkich dziedzinach fizyki napotykamy pojęcia mechaniczne (np. pojęcie siły, potencjału, energii itd), w całej fizyce używamy systemu zasadniczego dla mechaniki [C g S], z którego możemy wyprowadzić wszystkie inne. Ogółem prawie całą fizykę można przedstawić z punktu widzenia mechaniki. Istotnie tedy zdawałoby się, że mechanika jest podstawą fizyki teoretycznej. Pogląd taki nazywa się w filozofii materialistycznym. Wyznaje go np. Bruchner w dziele: *Kraft u. Stoff, Färisen*, że wszystkie wogóle zjawiska przyrody dają się pojąć jako zjawiska ruchu cząstek materialnych.



15

Dziś jednak pogląd ten porzucony; można wprawdzie zjawiska fizyczne tłumaczyć prawami mechaniki - atoli wytworzony w nowych czasach pogląd teor. elektryczny wyjaśniający zjawiska elektryczne przemawia nam więcej do przekonania. Istnieje jeszcze trzeci system teor. energistyczny mający jeszcze dziś zwolenników zwłaszcza w termodynamice. Z tych trzech poglądów jest obecnie ów elektryczny w modzie.

Skąd pochodzi dominująca rola mechaniki w fizyce? Powody tego są historyczne, które może się dać uzasadnić psychologicznie, bo zjawiska mechaniczne najłatwiej i najwyraźniej zdają się być komunikatami; nadto porównania zjawisk mechanicznych mamy dwa empyryczne: wzrokowy i miernicowy, podczas gdy do poznania innych zjawisk np. optycznych jeden tylko: wzrokowy, do poznania zjawisk cieplnych - jeden empyryczny: temperatury, - zjawisk elektrycznych żadnego właściwie.

Już w starożytności mieli filozofowie awatarsa greccy, pomimo że rzymscy, pewne wiadomości z dziedziny statyki. Posługiwali się oni wyrażeniami prawie kalkulatorycznymi w celu poznania zjawisk fizycznych; stąd oczywiście nie mogli wyjść poza statykę. Archimedes miał już wiadomości pomimo systema-



tyczne, obliczał już np. środek ciężkości odcinka paraboli. Co do dynamiki mieli atoli starożytni pojęcia racjonalne i błędne.

Arystoteles dawał np. ruchy na gwałtowne czyli wbrew naturze - do takich kalibra rzucanie - i na zgodne z naturą - np.

spadanie ciała. Według niego ciało rzucone leci prostolinijnie, a potem nagle spada na ziemię. Dalej pojęcia co do ciał lekkich i ciężkich są u nich myślarne.

Średnie wieki były stracone dla nauki fizyki.

Dopiero za czasów renesansu znowu się jej wzrost zaczyna.

Tak u Leonarda da Vinci <sup>1452-1519</sup> w jego traktacie o maszynach spotykamy ciekawe uwagi o mechanice, ośrodkowe dopiero przez Galileusza (1564-1642), który w swoim dziele: Discorsi et demonstrationi dochodzi częścią spekulacją, częścią doświadczeniem do praw o współdziałaniu sił i o berwotności. Właściwym twórcą jednak mechaniki jest Newton (1642-1711) przez owe słynne tres leges motus w dziele Philosophiae naturalis principia math. <sup>x)</sup> Jemu zawdzięczamy ujęcie praw mechaniki w równania i zewnętrzny metodę. Współczesnie z Newtonem żyje Huyghens, który w swoim Chronologium oscillatorium zajmuje się wahadłem. Prawami Newtona w zastosowaniu do szczególnych wypadków zaj-



1717-1783

myślę się rodząca Bernoullich dalej D'Alembert i inni.

Daleko ogólniejsze ujęcie matematyczne praw mechaniki

dał <sup>1736-1813</sup> Lagrange w dziele: "Mécanique analytique" w 2

wydaniach 1788 i 1811 r.; wprowadza on zasadę prac przy-  
gotowanych i swe słynne równania. Szczęśliwie on też,  
że w całym dziele obszedł się bez jednej figury geometrycznej.

Jest to wprowadzenie ciekawe, lecz w nowszych czasach uważa-  
my, że pojęcia geometryczne ułatwiają nam badania. Metodę  
geometryczną postugiwał się równocześnie z Lagrangem  
iżyszy Poisson. Dalej Hamilton, Jacobi, Gauss, Hertz  
starali się ująć mechanikę w odmienną formę, a w szczególności  
Hertz w sposób najbliższy pod względem logicznym.

W ostatnich wreszcie latach zjawiały się nowe rewolucyjne  
myśli, odrywające się od zasad Newtona. Zachodzi wątpli-  
wość czy równania Newtona są całkiem słuszone. Podstawę  
do tej wątpliwości dają zjawiska elektromagnetyczne. Z tego  
nowego punktu widzenia uważamy prawa Newtona za  
ogromne przybliżenie tak ogromne, że nigdy prawdopo-  
dobnie nie zajdzie wypadek, by się nie spełniły - ale teore-  
tycznie uwzględniamy przecież tę okoliczność, że to są  
przybliżenia.



## Działy mechaniki.

Mechanikę dzielimy ze względu na stopień przybliżenia oraz z powodów dydaktycznych na mechaniczną punktów, mechaniczną ciał sztywnych i mechaniczną ciał sprężystych (odkształcających się). Np. gdy chodzi o ruch planet około słońca, to możemy ten ruch uważać za ruch punktów, o ile nam chodzi o pierwsze przybliżenie; w porównaniu wielkich odległości tych ciał od siebie z ich wielkością i kształtem możemy je ostatecznie pominać. Więcej punktów takich wziętych pod uwagę stanowi system punktów. Gdy rozważamy ruch jednej z tych planet np. ziemi, uwzględnimy jej ruch obrotowy, precesję, więc weźmiemy pod uwagę być może o pewnym kształcie, to już będziemy mieli do czynienia z mechaniczną ciał sztywnych. Gdy wreszcie uwzględnimy wpływ odkształceń np. przypływ i odpływ na ruch ziemi itd, to już osiągniemy trzeci stopień dokładności mechanicznej ciał sprężystych.

Również dzieli mechanikę na statykę i dynamikę (Staroświecki podział). Statyka to specjalny wypadek dynamiki, gdy prędkość równa jest zeru. Uważano ją przedtem za część geometrii; wchodzi tam jednak prócz wielkości przestrzennych jeszcze pojęcie masy i siły.



Jeszcze jest inny podział na kinematykę i kinetykę (dynamikę). Kinematyka dotyczy ruchów ciał bez względu na siłę; operuje więc pojęciami przestrzeni i czasu. W dynamice czyli kinetyce przychodzi jeszcze pojęcie masy lub siły (wychodzi to na jedno). Kinematyka jest zbliżona do geometrii; wchodzi tylko jeszcze pojęcie czasu. Kinetyka zawiera już pojęcie masy, jest więc już nauką empiryczną. Zadania mechaniki rozpadają się zwykle na dwie części: kinematykę i kinetykę. My zaczniemy od mechaniki punktu i kinematyki.

## Rachunek wektorowy.

Zanim przystąpimy do właściwego przedmiotu, musimy się zaznajomić z zasadami rachunku wektorowego. Wprawdzie używana jest jeszcze powszechnie w fizyce metoda geometrii analitycznej, jednak niedawno wprowadzony rachunek wektorowy daje się czystokroć bardzo dobrze ze względu na krótkość i jasność stosować do najtrudniejszych nawet zagadnień fizyki. Porozumiemy przez rachunek wektorowy pewien sposób symboliki i operacji ułatwiających rozumowanie nad wielkościami przestrzennymi. Zasady rachunku wektorowego pochodzą od



Grassmaña (1847 *Linealausdehnungslehre*, 2<sup>g</sup> wyd 1862.)  
 Dłeto jego nie zwróciło jednak uwagi na się i mierałinie tedy  
 od Grassmaña wprowadził Hamilton swoje Kwaterniony,  
 wielkości zbliżone do wektorów, posiadające atoli 4 jednostek\*)  
 Definicja Kwaternionów jest również bardzo abstrakcyjną,  
 lecz rachunek niemi doprowadza z zaskakującą łatwością do  
 rozważań zagadnień mierzących bardzo zowitych w sposób zwykły  
 w geometrii i mechanice. Rachunek ten uprościł Heaviside  
 w latach 90 przez odrzucenie jednej z jednostek. Stosowano  
 go początkowo przedewszystkiem w elektryczności. Jednym z pierw-  
 szych wykładających go był pr. Smoluchowski we Wiedniu. Do  
 porównania się go przystąpił i wiele pr. Föppl, który go też  
 wyłożył w wybornem swem dziele, *Technische Mechanik*.

Literatura: Laub (polsk.) *Zarys rachunku wekt.*; Valentiner: *Vektoranalysis*; Bucherer; Jens; Ignatowski; Jahnke; Silberstein (o elektr.-magnet).

Wektorem nazywamy wielkość, która ma nie tylko wyznac-  
 berwzględny ale także kierunek. Takie wielkości wektorowe  
 w fizyce są np: prędkość, siła mechaniczna, elektryczna,  
 przyspieszenie itp. W przeciwstawieniu do tego są wielkości,

\*) Arzym. teoria Kwaternionów przez W. Sierpińskiego. Naśladem  
 Kłóka mat.-fiz. wędrowie.



Które nie mają kierunku w przestrzeni; są to tzw. wielkości skalarne np: masa, gęstość, temperatura, praca, energia, potencjał itp.

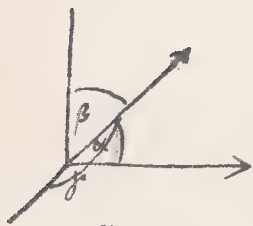


Fig 1.

Do określenia kierunku wektora w przestrzeni potrzeba dwóch kątów albo trzy rzuty wektora na oś układu, do określenia zaś jego orientacji trzeba jeszcze podać strzałkę (Niemcy mają na określenie tego, co my nazywamy orientacją, wyraz: Sinn des Vektors, w odróżnieniu

od Richtung d.v.; w polskim języku jest tu wyraz kierunek w obu tych znaczeniach używany). Wielkość wektora określa linia dana.

Wielkości wektorowe nazywają się różnymi sposobami; my na ich oznaczenie będziemy używać liter gotyckich:

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \dots$

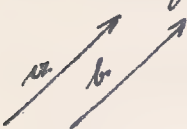
w przeciwieństwie do wielkości skalarnych, które nazywać będziemy literami łacińskimi:

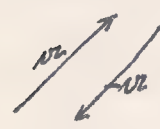
$a, b, c, d, \dots$

W matematyce wolno nam wprowadzać dowolne symbole; trzeba tylko określić dla nich operacje (konwencje) tak by nie zawodziły sprzeczności. Zauważmy więc takie umowy dla wektorów i określmy dla nich: znak równości, dodawanie, odejmowanie i mnożenie:

I. Dwa wektory  $\mathfrak{a}$  i  $\mathfrak{b}$  są wtedy i wtedy tylko równe, jeśli



charakterystyczne cechy wektorów są takie same, a więc jeśli jest  

 równa długość przesunięć i identyczne kierunki  
 oraz strzałki. Innymi słowy powiemy, dwa wektory  $a$  i  $b$  są równe, jeśli się mogą wzajemnie pokryć przez przesunięcie równoległe. Równość tedy dwa wektoria reprezentuje nam trzy równania.


 Jeśli dwa wektory mają tylko długości i kierunki równe, strzałki zaś przeciwnie skierowane, oznaczamy to znakami:  $a, -a$ .

II. Sumę dwa wektorów  $a$  i  $b$  nazywamy trzeci wektor  $c$ , który otrzymujemy przez kolejne wykonanie przesunięć wektora  $a$  potem w jego końcu wektora  $b$  i oznaczamy to:

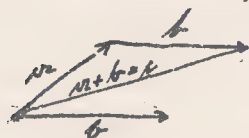


Fig 4

$$a + b = c$$

Innymi słowy: trzeci bok trójkąta jest sumą dwa innych. Dodawanie tak określone, nazywamy je geometrycznym, jest konwencją; powód formalny takiej nazwy jest ten, iż ważne są tu prawa algebry: przemienności

$$a + b = b + a$$

i dla trzech wektorów prawo łączności:

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$



jak to łatwo stwierdzić na podstawie definicji. Prawo dodawania można łatwo uogólnić na jakiegokolwiek był składowy, linie wektorów. Dodawanie geometryczne ma zastosowanie w składaniu prędkości, sił, przyspieszeń itd. (Zauważymy jeszcze że porządek spotęgowanych nie potrzebuje dla wektora być określony). Wyprowadzimy teraz z definicji dodawania wnioski: Suma  $n$  wektorów równych  $a$  daje znowu wektor:

$$\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ razy}} = n a.$$

Stąd: można każdy wektor uważać za wielokrotność wektora jednostkowego. Możemy to zapisać:

$$a = a N = T a \cdot U_a$$

gdzie  $N$  lub  $U_a$  oznaczają wektor jednostkowy; podaje on nam kierunek i strzałkę i nazywamy go prosto versorem;  $a$  lub  $T a$  podaje nam miarę bezwzględną wektora  $a$ , i nazywamy te znaki tensorem.

Na szczególną uwagę zasługują wektory jednostkowe w trzech kierunkach przestrzeni. Znaczywszy je stale:

$$i, j, k.$$

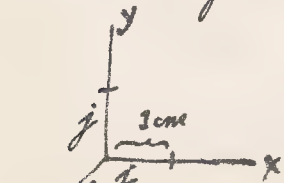


Fig. 5.

Chcąc wyrazić jakikolwiek wektor  $a$  przez owe trzy wektory jednostkowe, wystarczy ułożyć trzy razy wektory  $a$  na osiach układu prostokątnego, oznaczyć wartości bez-



względne  $x, y, z$  i zauważyć, że  $r$  przedstawia sumę geometryczną swych składowych:

$$r = ix + jy + kz.$$

Wartość bezwzględna takiego wektora  $r$  jest, jak łatwo widzieć:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Mając dwa wektory:  $u = a_1i + a_2j + a_3k$

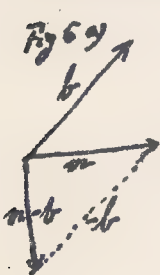
$$v = b_1i + b_2j + b_3k$$

powiemy, że są one równe, jeśli

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$$

Widać stąd, że rachunek wektorowy upraszcza geometrię analityczną zastępując jednym równaniem trzy równania teore.

III. Definicję odejmowania wyprowadzamy z definicji dodawania kładąc:



$$a - b = a + (-b)$$

$$b - a = b + (-a)$$

Powysze definicje dodawania i odejmowania pochodzą od Grassmanna. Od dawna atoli znany jest ich szczególny przypadek w przedstawianiu wielkości zespolonych.

Na iloczyn mamy w rachunku wektorowym dwie istotnie różne definicje tj iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy.



IV. Iloczyn skalarny, czyli, jak go Grassmann nazywał, wewnętrzny określający następującą własność:

$$a \cdot b = (a \cdot b) = S a \cdot b = a \cdot b \cos(\angle a b)$$

Należy pamiętać jest prawo przemienności (nie jest to już wektor).

$$a \cdot b = a \cdot b \cos(\angle a b) = b \cdot a \cos(\angle b a) = b \cdot a$$

oraz prawo rozdzielności:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

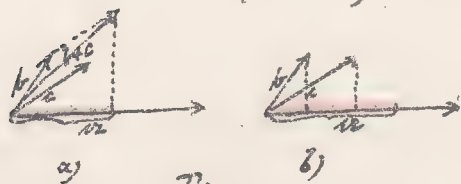


Fig. 7.

Lewą stronę równości tej przedstawia Fig. 7. a) prawą b).

Należy pamiętać jeszcze prawo łączności iloczynu  $a \cdot (b \cdot c)$ ; tu prawo to niema zastosowania.

Jako wniosek określenia mnożenia skalarnego, dostajemy na iloczyn wektorów prostopadłych  $a \perp b$ :

$$a \cdot b = 0, \text{ bo } \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Równość powyższa jest zarazem kryterium prostopadłości dwóch wektorów.

Stosując definicję iloczynu skalarnego do wektorów jednostkowych  $i, j, k$  dostajemy:



$$(i, i) = 1 \cdot 1 \cos 0 = 1, (j, j) = 1, (k, k) = 1$$

wogóle  $(a, a) = a^2 = a^2$ , natomiast:

$$(i, j) = 1 \cdot 1 \cos 90 = (i, k) = (j, k) = 0$$

Nobec tego iloczyn skalarny dwu wektorów:

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad \text{oraz}$$

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k \quad \text{przedstawiać:}$$

$$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Zastosowując określenie iloczynu skalarnego do dwu dowolnych wektorów jednostkowych  $M$  i  $L$  zamykających kąt  $\varepsilon$  dostajemy w prosty sposób wzór znany w geometrii analitycznej:

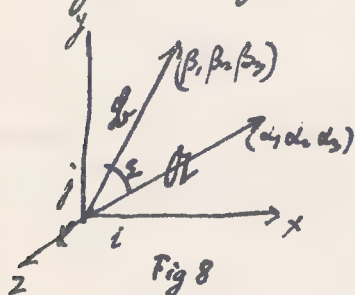


Fig 8

$$M, L = \cos \varepsilon = \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3,$$

gdzie  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$   $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  oznaczają kąty, jakie wektory  $M, L$  tworzą z osiami układu.

Mozna tu też w sposób całkiem prosty wyprowadzić wzór

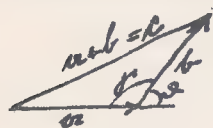


Fig 9

Cornota:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2(a, b) + b^2 \quad \text{czyli}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \varepsilon \quad \text{lub}$$

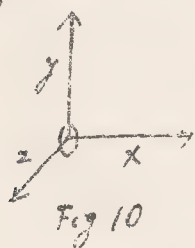
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



V. Iloczyn wektorowy czyli jak go Grassmann nazywa zewnętrzny:  $[a, b] = V a, b$  określamy w następujący sposób: jest to nowy wektor, którego wielkość bezwzględna wynosi:  $a \cdot b \sin(\alpha)$ , kierunek zaś jest  $C$  prostopadły do kierunków wektorów  $a, b$  i tworzący z nimi system trójkąt „praworęczny” i piszemy to:

$$[a, b] = a \cdot b \sin(\alpha) C$$

Wyjaśnić należy jeszcze, co rozumiemy przez słowo system „praworęczny”. Wyobraźmy sobie układ np. prostokątny w przestrzeni tak, jak to przedstawia Fig 10., gdzie



narysowane osie są dodatnimi. Przez obrót około punktu O dodatnia os  $x^{da}$  może przejść w dodatnią os  $y^{da}$ , a następnie w dodatnią os  $z^{da}$ .

Wielki układ trzech wektorów, o dowolnych kierunkach, będziemy nazywali „praworęcznym”, jeśli w sposób ciągły przez obrót, każdy z wektorów będzie mógł w tym samym sensie, jak w naszym wypadku drzewgółowym, przechodzić kolejno w dwa pozostałe. Dla łatwiejszego pamiętania i oryentowania się podamy jeszcze określenie tego systemu za pomocą ruchu ręki przy wkorkowywaniu korko-  
ręgu praworęcznego (lub śruby prawoskrętnej).



System praworeczny jest to taki układ trzech wektorów, dowolnie do siebie nachylonych, gdy w punkcie ich początkowym umieścimy prawą rękę zwróconą palcami w kierunku strzałki jednego z nich, to przy skróceniu ręki wzywaniem dla wkorkowania karkocięgu praworecznego, pozostały wektor przechodzi ciągłym obrotem w trzeci. System praworeczny jest wzywany w Anglii, stąd zowią go też „angielskim”. Znany on jest również pod nazwą „chmielowego” bo tak wije się chmiel około swej podpórki. Jest jeszcze w wyciu system „lewareczny”, lub „francuski” lub „winny”. My używac będziemy systemu praworecznego.



Wracając obecnie do definicyi iloczynu wektorowego, dochodzimy na podstawie powyższego określenia systemu praworecznego do wniosku, że np. iloczyn wektorowy wektorów  $\underline{a}$  i  $\underline{b}$

(Fig 11) będzie wektorem prostopadłym do płaszczyzny przesuniętej przez kierunki  $\underline{a}$  i  $\underline{b}$  będzie strzałką ku nam zwrócony. Iloczyn natomiast wektorowy  $[\underline{b}\underline{a}]$  przedstawia wektor co do wielkości bezwzględnej równy poprzedniemu, strzałką jednak skierowany wresz przeciwnie. Stąd

$$[\underline{b}\underline{a}] = -[\underline{a}\underline{b}]$$



Nieraz więc dla iloczynu wektorowego prawa przemienności;  
ważne natomiast jest dlań prawo rozdzielności tj:

$$[a(b+c)] = [ab] + [ac]$$

Dowód na to przeprowadza się na mocy definicji. Równość  
powyższa jest równoważna z równością:

$$a[M(b+c)] = a[Mb] + a[Mc],$$

gdzie  $a$  oznacza tensor zaś  $M$  wektor. Co do wartości bez-

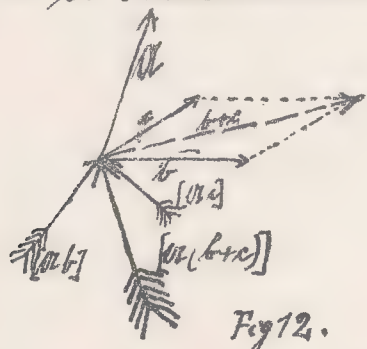


Fig 12.

względnej jest ta równość oczywista,  
co do kierunku zaś strzałki, rozwa-  
żajmy z osobna stronę lewą i pra-  
wą przypuszczalnej równości i

przekonajmy się, czy kierunki się nakładają, drogą geometryczną.

Wektor  $[M(b+c)]$  jest skierowany prostopadle do płaszczyzny  
poprowadzonej przez  $M$  i  $b+c$  od patrzącego na rycinę. (Fig 12).

Wektor  $[Mb]$  prostopadły do płaszczyzny poprowadzonej przez  $M$  i  $b$   
oraz  $[Mc]$  prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez  $M$  i  $c$   
są również skierowane strzałką od patrzącego na rycinę.

Wektory  $[M(b+c)]$ ,  $[Mb]$ ,  $[Mc]$  jako prostopadłe do wektora  $M$   
leżą w jednej płaszczyźnie. Wektory  $b+c$ ,  $b$ ,  $c$  leżą też  
w jednej płaszczyźnie. Utwórnmy w myśli ich rzuty na pła-  
szczyznę wektorów poprzednich. Po obrocie o  $90^\circ$  dałyby te



wektory kierunku wektorów  $[M(b+c)]$ ,  $[Mb]$ ,  $[Mc]$ . Stąd słuszność naszego powiedzenia.

Jeśli  $m \parallel b$  to  $[mb] = 0$ , jeśli zaś  $m \perp b$   $[mb] = ab \cdot l$ .

Wobec tego:  $[ii] = 0$ ;  $[jj] = 0$ ;  $[kk] = 0$

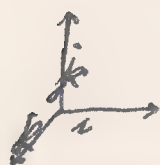


Fig. 13.

$$[ij] = k \quad [ji] = -k$$

$$[jk] = i \quad [kj] = -i$$

$$[ki] = j \quad [ik] = -j$$

Wyrażając wektory przez wektory składowe, dostaniemy

$$[mb] = [a_1 i + a_2 j + a_3 k][b_1 i + b_2 j + b_3 k] =$$

$$= i(a_2 b_3 - a_3 b_2) + j(a_3 b_1 - a_1 b_3) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Co się tyczy dzielenia, to zauważymy że dzielić można wektory przez wielkości skalarne, uważając tę operację jako odwrotną mnożenia wektora przez wielkość skalarne; natomiast dzielenia przez wektor nie określamy. Rozważymy jeszcze dwa następujące składowania trzech wektorów:

$$([c[mb]]), [c[mb]]$$

Pierwsze z tych wyrażeń da się łatwo interpretować geometrycznie:



nie. Zauważymy przede wszystkim, że nie będzie ono już wekto-

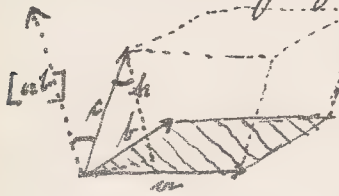


Fig 14.

rem.  $[a, b] = ab \sin(\alpha) c$  przedstawia co do wartości bezwzględnej pole równoległob. ka pokreskowanego. Zatem  $(c[a, b]) =$   
 $= c \cdot ab \sin(\alpha) \cos(c, [a, b])$  przedstawia objętość

równoległoscianu o wysokości  $h$ . Napiszemy więc:

$$(c[a, b]) = \int c \nabla a b = Vol(a, b, c)$$

Do tego samego doszlibyśmy drogą rozpisywania na składowe wektory:

$$[a, b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i(a_2 b_3 - b_2 a_3) + j(a_3 b_1 - b_3 a_1) + k(a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

$$(c[a, b]) = c_1(a_2 b_3 - b_2 a_3) + c_2(a_3 b_1 - b_3 a_1) + c_3(a_1 b_2 - b_1 a_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

co przypomina nam znany wzór geometrii analitycznej na objętości równoległoscianu

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

którego jeden wierszolatek znajduje się w początku układu prostokątnego zaś, inne zaś określone są współrzędnymi  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ .



Zakładając w szczególności, że

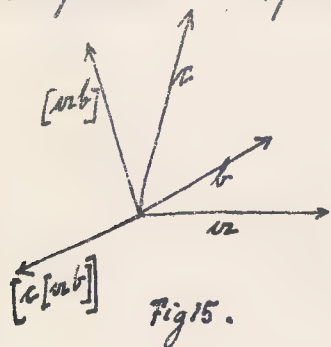
$$(\alpha[\alpha, b]) = 0$$

wnioskujemy, że przynajmniej jeden z wektorów jest zerem. W tym wypadku, jako nieciekawy odrzucimy, poróżając nam wniosek drugi, że wszystkie trzy wektory leżą w jednej płaszczyźnie czyli są komplanarne. Relacja więc

$$(\alpha[\alpha, b]) = 0$$

gdzie  $\alpha$  przedstawia wektor zmienny oznacza, że wektor  $\alpha$  leży w płaszczyźnie wektorów  $\alpha$  i  $b$ .

Drugie ze wspomnianych wyrażenie  $[\alpha[\alpha, b]]$  rzadziej jest spotykane i niema tak prostego wytłumaczenia geometrycznego. Wyrażenie to będzie już wektorem; postaramy się inaczej je napisać. Z prostego rozważania wynika, że wektor  $[\alpha[\alpha, b]]$



leży w płaszczyźnie poprowadzonej przez wektory  $\alpha, b$ . Można tedy rozłożyć z tych wektorów rozłożyć w składowe w kierunkach dwóch prostopadłych. Można więc

napisać:  $[\alpha[\alpha, b]] = u\alpha + vb$

gdzie  $u$  i  $v$  są teraz nieokreślone. Równanie to zachowa się przez pomnożenie po obu stronach przez jakąkolwiek wiel-





Kosę, więc np. przez  $v$ . Bezdnie

$$(c[c[ab]]) = u(c a) + v(c b)$$

Leż wektor  $c \perp [c[ab]]$ , zatem  $(c[c[ab]]) = \rho c[c[ab]] = 0$ , stąd

$$\frac{u}{v} = - \frac{(c b)}{(c a)} \quad \text{czyli}$$

$$u = \alpha(c b) \quad v = -\alpha(c a)$$

gdzie  $\alpha$  jeszcze nie określone. Wstawiając wartości  $u, v$  wyżej mamy:

$$[c[ab]] = \alpha \{ a(c b) - b(c a) \}$$

Widz  $\alpha$  nie zależy od szczególnego nachylenia do siebie wektorów:  $c, [ab], a, b$ ; zatemy tedy w szczególności:  $a = i, b = j, [ab] = k, c = i$ . Wobec równości  $[i k] = -j$  dostaniemy:

$$-j = \alpha \{ i \cdot 0 - j \cdot 1 \}$$

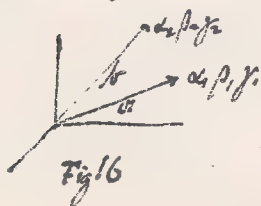
zatem  $\alpha = 1$ . Stąd zaś dostajemy wzór żądany:

$$[c[ab]] = a(c b) - b(c a).$$

Kombinowanie iloczynu wektorowego i skalarnego prowadzi nas do nam jeszcze jedno ciekawe wyrażenie:

$$([ab][ab]) = ([ab])^2 = a^2 b^2 \sin^2(\alpha b)$$

Zakładając  $a^2 b^2 = 1$ , oraz  $\angle(a b) = \varphi$ ,



$$a = i \cos \alpha_1 + j \cos \beta_1 + k \cos \gamma_1$$

$$b = i \cos \alpha_2 + j \cos \beta_2 + k \cos \gamma_2$$

dostajemy wzór:

$$(\cos \beta)^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - b_3 a_1)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 \text{ czyli}$$

$$\sin^2 \varepsilon = (\cos \beta_1 \cos \beta_2 - \cos \beta_2 \cos \beta_1)^2 + (\cos \beta_1 \cos \alpha_2 - \cos \beta_2 \cos \alpha_1)^2 + (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1)^2$$

Barzo prostym wzorami przedstawiają się w rachunku wektorowym równania linii prostej, krzywej, płaszczyzny w przestrzeni.

Niech się też pokrótce zajmniemy.

Równanie krzywej wogóle dostaniemy, wyrażając wektor  $r$ , jako funkcję parametru dowolnego  $s$ .



Fig 17

$$r = f(s)$$

Jeśli np.  $m$  oznacza nam wektor stały o określonym kierunku, to równanie prostej, przechodzącej przez początek układu  $O$ , w tym danym kierunku, będzie



Fig 18.

$$r = x \cdot m$$

gdzie  $x$  podaje wielokrotność wektora  $m$ . Gdybyśmy chcieli mieć równanie prostej, przechodzącej przez punkt przestrzeni  $P$  w kierunku wektora  $m$ , wystarczy zauważyć z uwagi, że :

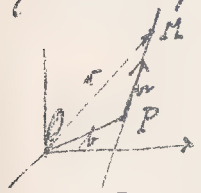


Fig 19.

$$r = b + x \cdot m$$

Jest to zadane równanie prostej,  $m$  i  $b$  oznaczają pewne wektory stałe, zaś  $x$  wielkość zmienną mierzalną.



Analogicznie dostaniemy na równanie płaszczyzny przechodzącej przez dwa dane wektory  $a, b$ , i początek układu  $O$  wzór:

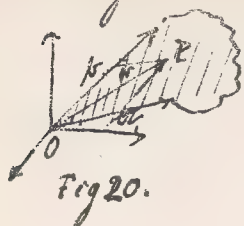


Fig. 20.

$$r = u a + v b,$$

gdzie  $u$  i  $v$  zmienne dowolne. By dostać zaś równanie płaszczyzny nie przechodzącej przez początek układu  $O$ , leżącej

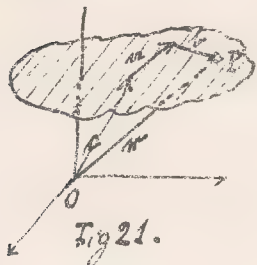


Fig. 21.

zaś na wektorach  $a$  i  $b$ , wystarczy z wyc. 21, że

z wyc. 21, że

$$r = c + u a + v b.$$

Tem równaniem będzie objęty każdy punkt  $P$  żądanej płaszczyzny. Ze wzorów tych łatwo przejść do równań zwykłych geometrii analitycznej, rozkładając wektory na ich składowe w kierunkach  $x, y, z$ : Np. w ostatnim równaniu mamy:

$$r = i x + j y + k z = i c_1 + j c_2 + k c_3 + u(i a_1 + j a_2 + k a_3) + v(i b_1 + j b_2 + k b_3).$$

Porażkując według  $i, j, k$  dostajemy:

$$x = i c_1 + u a_1 + v b_1,$$

$$y = i c_2 + u a_2 + v b_2$$

$$z = i c_3 + u a_3 + v b_3$$

Rugając stąd  $u, v$  dostajemy równanie płaszczyzny zwykłe geometrii analitycznej. Ogólny kształt równania płaszczyzny w rachunku wektorowym przedstawia się

$$r = \varphi(u, v)$$

gdzie  $u, v$  są dwoma parametrami niezależnymi, bo płaszczyzna jest utworem dwuwymiarowym. Równania w tej formie napisane nazywamy wyrażeniami (explicit Vektorgleichungen), w przeciwstawieniu do równań, gdzie  $r$  nie jest wyrażane wyrażnie jako funkcja pozostałych parametrów. Te ostatnie równania nazywamy niewyrażeniami (implicit Vektorgleichung).

Przykłady takich równań mieliśmy już: Powiedzmy, że

$$(a, b) = 0$$

znaczy, że wektor  $a \perp b$ . Załóżmy, że  $b$  jest wektorem zmiennym i naznaczymy go:  $r$ . Dostaniemy równanie płaszczyzny

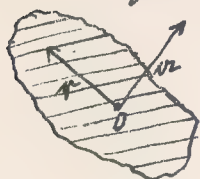


Fig 22

$$(a, r) = 0$$

przechodzącej przez  $O$  i prostopadłej do  $a$ . Gdybyśmy chcieli dostać równanie płaszczyzny nie przechodzącej przez początek wektora  $O$ , lecz ogólne, trzeba na miejsce  $r$  wstawić  $\vec{MP} = b - r$

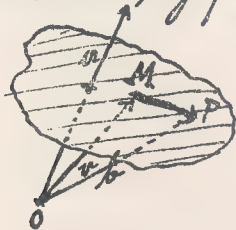


Fig 23

$$(a, (b-r)) = 0$$

Wykonując ów iloczyn skalarny, mamy:

$$(a, b) = (a, r) = m \text{ liczba skalarna. Zatem}$$

$$(a, r) = m$$



przedstawia najogólniejszą formę równania płaszczyzny. Rozpisując je, mamy:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = m$$

$$\frac{x}{\left(\frac{m}{a_1}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{m}{a_2}\right)} + \frac{z}{\left(\frac{m}{a_3}\right)} = 1$$

równanie odcinkowe płaszczyzny.

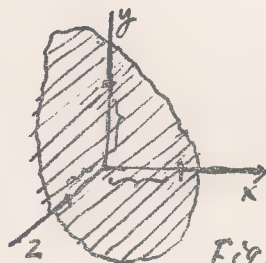


Fig 24

Wiemy również, że:

$$[r, m] = 0$$

oznacza że wektor  $r \parallel m$ . Jest to zatem równanie prostej przechodzącej przez 0 i równoległej do  $m$ .

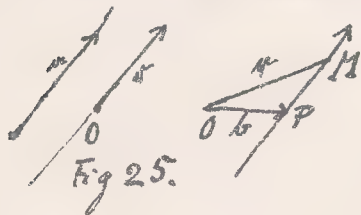


Fig 25.

Równanie prostej ogólne dostaniemy zastępując  $r$  przez  $r - b = \overline{PM}$ .

$$[(r - b), m] = 0$$

Stąd  $[r, m] = [b, m]$  lub

$$[r, m] = N$$

ogólne równanie prostej

wiekłane. Da się ono znowa przez rozpisanie sprowadzić do formy Kartezjuszowskiej:

$$[r, m] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = i c_1 + j c_2 + k c_3$$

Skąd

$$a_3 y - a_2 z = c_1$$

$$a_1 z - a_3 x = c_2$$

$$a_2 x - a_1 y = c_3$$

Skład przez rugowanie dochodzimy do równania prostej współrzędnych punktu  $x, y, z$ .

Jeszcze damy przykład zastosowania rachunku wektorowego do krzywych przestrzennych. Krzywa przestrzenna

przedstawi się równaniem:

$$r = \varphi(u)$$

gdzie  $u$  jest parametrem zmiennym.

Dla  $u + du$  będzie

$$r + dr = \varphi(u + du) \quad , \text{ skąd}$$

$$dr = \varphi(u + du) - \varphi(u)$$

Stąd dostajemy już wprost równanie stycznej do krzywej przestrzennej. Niech dla pewnego  $u_0$ , wektor  $r$  staje się  $r_0$ .

Dla takiego punktu krzywej równanie jej stycznej będzie:

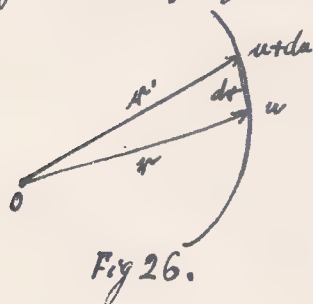
$$[(r - r_0) dr] = 0$$

Równanie płaszczyzny normalnej do stycznej, gdy żądamy by  $(r - r_0) \perp dr$ . Żadając uczyni się temu warunkowi równaniem:

$$(r - r_0) dr = 0$$

Jest to więc równanie płaszczyzny normalnej przechodzącej przez pewien punkt krzywej.

Jeżeli przez trzy punkty przestrzeni poprowadzimy płaszczyznę





czyrnej, to to wychodzi na jedno, gdybyśmy powiedzieli, że prowadzimy płaszczyznę przez dwa wektory przechodzące przez owe punkty. Płaszczyznę taką nazywamy ściśleścyczną. Z poprzedniego wiemy, że równość  $(r[ab])=0$  oznacza, że wszystkie trzy wektory leżą w jednej płaszczyźnie. Zrobimy z tego zastosowanie. Z równania krzywej  $r = \varphi(u)$  i z fig 27. mamy:



fig 27.

$$r' = r + dr = \varphi(u + du) = r + \varphi'(u) du$$

$$r'' = r' + d^2r = r' + d^2r = r + \varphi''(u) du^2$$

Równanie:

$$(r - r_0)[dr d^2r] = 0$$

oznacza, że wektor  $r - r_0$  leży w płaszczyźnie wektorów  $dr$  i  $d^2r$  czyli równanie to określa nam płaszczyznę ściśleścyczną, przechodzącą więc przez dwa wektory  $dr, d^2r$ , czyli przez trzy punkty krzywej.

Prostopadła w punkcie krzywej do płaszczyzny ściśleścycznej (czyli prostopadła do dwu wektorów stycznych krzywej) również binormalna. Jeśli oznaczymy, że symbol  $U[ab]=0$  oznacza nam wektor prostopadły do obu wektorów  $a$  i  $b$ , to

$$N = U[dr d^2r]$$

oznaczać nam będzie kierunek normalnej. Prosta prostopadła w punkcie krzywej do jej stycznej i binormalnej nazywamy

się normalną główną. Postępując się tem samem nakowaniem co wyżej, naznaczymy jej kierunek:

$$N_g = U[Ndr] = U[dr[dr d^2\varphi]].$$

Przykład. Jako przykład numeryczny można by uwarzać krzywą śrubową utworzoną na powierzchni walca przez punkt kota obracającego się około osi przez jego środek przechodzącej, wzdłuż której kota się posuwa. Równanie takiej krzywej będzie:

Fig 28.



$$r = ix + jy + kz$$

w którym, jeśli  $a$  oznacza promień kota, a  $\alpha$  kąt zawarty między osią  $k$  a promieniem tego

kręgiem punktu krzywej z punktem osi, jest

$$x = a \cos \alpha, \quad z = a \sin \alpha,$$

Łakadojąc na kąt  $\alpha$  emienny wzdłuż  $\beta y$ , dostaniemy swoje równanie w formie:

$$r = i a \cos(\beta y) + jy + k a \sin(\beta y)$$

Ma więc to równanie kształt ogólny  $r = \rho(y)$ . Chcąc uproszczyć równanie stycznej, utworzymy:

$$dr = (-i a \beta \sin \beta y + j + k a \beta \cos \beta y) dy \text{ i wstawimy}$$

to w równanie ogólne stycznej. Będzie więc styczna tej krzywej:

$$[(r - r_0)(-i a \beta \sin \beta y_0 + j + k a \beta \cos \beta y_0) dy] = 0$$



Analogicznie wyprowadzilibyśmy wzory na płaszczyznę normalną, ściśle stycznią, binormalną, normalną główną, w co już nie wchodzić. Zauważymy tylko, że o ile wygodnym byłby rachunek wektorowy w ogólnych rozważaniach, to w szeregotowym obliczaniu sprawy nie ułatwiał.

Jeszcze rozważymy wypadek, gdy wektor  $r$  jest przedstawiony jako funkcja długości łuku  $s$ .

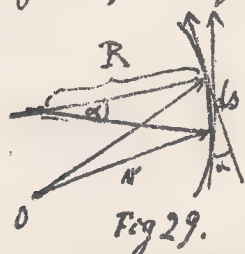


Fig 29.

$$r = f(s) \quad \text{Stąd}$$

$$dr = f'(s) ds$$

$$\frac{dr}{ds} = f'(s) = \tau(s) = \text{wektor jednostkowy w kierunku stycznej (jest to bowiem stosunek wektora do długości łuku).}$$

Wyobraźmy sobie takie dwa kolejne wektory jednostkowe  $\tau(s)$ ,  $\tau(s+ds)$ .

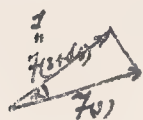


Fig 30.

$$\tau(s), \tau(s+ds).$$

$$\tau(s+ds) - \tau(s) = d\tau$$

$$\frac{\tau(s+ds) - \tau(s)}{ds} = \frac{d\tau}{ds}$$

Jeśli  $|d\tau|$  oznacza nam wartość bezwzględna,  $R$  promień krzywizny (Fig 29) to:  $|d\tau| : ds = 1 : R$ . Stąd krzywizna

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \left| \frac{d^2 r}{ds^2} \right|$$

(znaczenie 2<sup>tej</sup> pochodnej). Rozważania te znajdziemy zastosowanie przy sile odśrodkowej. Na tem kończymy na razie

zajmowanie się rachunkiem wektorowym, porostawiając sobie  
wzajemnie go w zastosowaniach fizycznych w stosownych  
miejscach później i przystępujemy już do zagadnień me-  
chaniki.

## Kinematyka punktu.

Kinematyka zajmuje się, jak już wyżej powiedzieliś-  
my, rozpatrywaniem ruchu tj. zmiennością położenia  
punktu w czasie bez względu na siłę (masę ciała). Aby  
ruch opisać musiemy mieć dane położenie punktu w posze-  
gólnych chwilach czasu. Położenie ciała punktu możemy  
określić tylko przez odniesienie do innych utworów przestrze-  
nych. Niepotykamy tedy zaraz na początku na bardzo waż-  
ną kwesję względności, dotyczącą ustalenia układu odniesie-  
nia. Jeślibyśmy nie wchodziłi w logiczną stronę naszych  
równań ruchu, to moglibyśmy sobie pomysleć taki układ  
gdziekolwiek na ziemi lub na jakiej gwiazdzie ustalony.  
Wobrem laboratoryum mogłyby nawet uzyskane prawa  
starać się ważnemi, lecz już dla zjawisk, w które ruchy  
ziemi lub gwiazdy wchodzi (np. zj. Foucolta) będą równania



nieważne. Starano się przedtem w inny sposób trudność tę usunąć; oto konstruowano sobie układ w przestrzeni tj. eteru i rozpatrywano wtedy ruchy względem eteru, który uważano za doremizem za nieruchomy. Sądzono, że aberracja światła daje nam ruchy względem eteru. Przekonano się odtąd, że to jest tylko aberracja gwiazd, doświadczenia zaś Michelsona wykazały, że ruchów względem eteru nie można stwierdzić. Długo wreszcie odrzucono zupełnie w fizyce pojęcie eteru, ale na miejsce jego wszedł nowy kłopot: pojęcie czasu. Dawniej tego pojęcia nie analizowano bliżej. Według nowych pojęć czołówek jadący w wagonie ma inny czas, niż stojący np. na stacji. Są to zasady względności opracowane przez Einsteina. Nie będziemy na razie w to wchodzić, pozostaniemy przy dawnym pojęciu czasu, a zaspokoiemy się tem, że owe innowacyjne rozróżnienia wcale są dopiero przy bardzo wielkich prędkościach np. ruchu światła. Wobec tego że układy względem, ziemi, gwiazd, czy też stałego  $\alpha$ , nie mają żadnego uzasadnienia, przyjmujemy jako definicję układu, najściślejszą jeszcze definicję Langer'a: Comyślimy sobie w bardzo wielkiej odległości od systemów planetarnych, tak by ich siły grawitacyjne

ne nie wywierały już żadnego wpływu, trzy strzelby prostopadle do siebie ustawione, równocześnie wystrzelone. Drogi pocisków wyznaczają nam trzy osie, a punkt przecięcia się tych dróg porażył układu. Położenie jakiegokolwiek

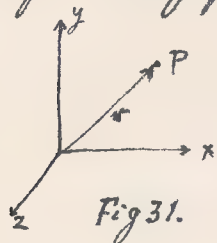


Fig. 31.

punktu P zależnie od czasu  $t$  (parametr) będzie określone sposobem geometryi analitycznej równaniami:

$$x = f(t) \quad y = \varphi(t) \quad z = \psi(t)$$

zaś w rachunku wektorowym równaniem:

$$r = P(t) = ix + jy + kz$$

Prędkość. Niech punkt P porusza się w sposób ciągły\*) i niech położenie jego będzie w każdej chwili określone. Mając tak dane dwa położenia  $P_1$

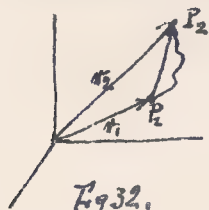


Fig. 32.

i  $P_2$  (następujące po sobie w czasie) przez wektory  $r_1$  i  $r_2$ . Dla chwil  $t_1$  i  $t_2$ , określamy jako prędkość przeciętną wyrażenie:

$$\frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}$$

gdzie  $r_2 - r_1$  oznacza różnicę geometryczną. Przechodząc w tem wyrażeniu do granicy, dostajemy prędkość w da-

\*) Co do pojęcia ciągłości funkcji patrz: Wstęp do teorii funkcji p.p. Sierpińskiego. (Kółko mat.-fiz.)



nej chwili :

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1} = M = \frac{ds}{dt}$$

Wyrznięcie to jest wektorem. Można je rozłożyć na wektory składowe:

$$M = \frac{\lim (ix_2 + jy_2 + kz_2) - \lim (ix_1 + jy_1 + kz_1)}{t_2 - t_1} = i \lim \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + j \lim \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + k \lim \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}$$

czyli

$$M = i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} + k \frac{dz}{dt}$$

Jest to najprostszy sposób rozkładania prędkości  $v$  na jej prędkości składowe w kierunkach osi układu. Znacząc

$$u = \frac{dx}{dt} \quad v = \frac{dy}{dt} \quad w = \frac{dz}{dt}$$

napiżemy nasz rozkład w formie:

$$M = iu + jv + kw$$

Wartość bezwzględna prędkości będzie:

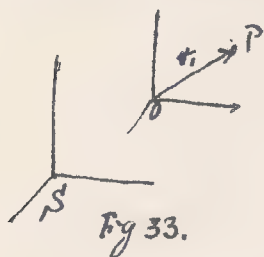
$$\begin{aligned} V &= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}}{dt} = \frac{ds}{dt} \end{aligned}$$

gdzie  $ds$  przedstawia element drogi,  $s$  ogólnie łuk drogi.

Słowami określają jeszcze inaczej prędkość: jako zmienność czasową położenia punktu. Definicja ta odnosi się nie tylko do prędkości jednostajnej ale też ciągle zmien-

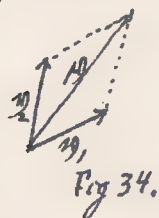
nej.

Składanie prędkości. Niech punkt  $P$  ma określone położenie



względem układu  $O$ , ten ostatni zaś niech ma określone położenie względem układu  $S$ . Przeto ma też punkt  $P$  określone położenie względem  $S$ . Będzie

ono superpozycją dwu poprzednich położeni. Stąd: zmiany położenia  $P$  względem  $O$  oraz zmiany układu  $O$  względem  $S$  superponują, tj zmiana położenia punktu  $P$  względem  $S$  jest sumą geometryczną dwu zmian poprzednio powie-



nych. Jeśli więc  $v_1$  oznacza prędkość  $P$  względem  $O$ , zaś  $v_2$  prędkość  $O$  względem  $S$ , to prędkość wypadkowa:

$$v = v_1 + v_2$$

Liczne są przykłady superpozycji: 1. Choćby owo sławne spadanie kufierka w wagonie poruszającym się.

2. Do obwodu koła wokół jadącego przyczepia się pasek.



Skutkiem takiego ruchu powstanie cykloida. W ruchu tym pow-

stają punkta zwrotne, gdzie prędkość = 0.

3. Figury Lissajous są złożeniem dwu ruchów harmonic.



nych względem siebie prostopadłych. Kształt tych figur zależy od stosunku okresów. Niech np. ruch tak będzie określony

$$x = a \sin \alpha t, \quad y = b \cos \alpha t$$

Prędkości:  $\frac{dx}{dt} = a\alpha \cos \alpha t$   $\frac{dy}{dt} = -b\alpha \sin \alpha t$

Prędkość wypadkowa:  $V = \sqrt{(a\alpha \cos \alpha t)^2 + (b\alpha \sin \alpha t)^2}$ .

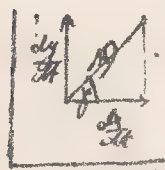


Fig. 36.

Kierunek jej znajdziemy z uwagi, że jej składowe  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  superponują się geometrycznie.

Będzie zatem:  $\tan \varphi = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \tan \alpha t$ .

Kształt toru dostaniemy rugując  $t$  z równań:  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ . Tu zatem:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha t &= \frac{x}{a} \\ \cos \alpha t &= \frac{y}{b} \end{aligned} \right\} \text{stad} \quad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

jest to równa-

nie elipsy. Zatem przy składowaniu dwu ruchów harmonicznych, prostopadłych do siebie, o różnych amplitudach  $a$  i  $b$ , a równych okresach  $\alpha$ , dostaniemy ruch eliptyczny.



Fig. 37.

Dla  $t=0$   $x=0$   $y=b$

Przywrócić  $t$ ,  $x$  rośnie,  $y$  maleje. Ruch odbywa się w kierunku strzałki.

Dla  $t = \frac{\pi}{2\alpha}$   $x=a$   $y=0$

"  $t = \frac{\pi}{\alpha}$   $x=0$   $y=b$  znowu ruch się

ten sam na nowo zaczyna. Zatem ruch ten periodyczny.

Jeżeli byśmy zostawili równania:

$$x = a \sin \omega t, \quad y = b \cos(\omega t + \varepsilon)$$

dostalibyśmy znów ruch po elipsie, atoli elipsa ta pociągana będzie asymetrycznie względem osi  $x$  i  $y$ . Będzie się ona mogła też degenerować w prostą. Stanie się to w razie,



Fig 38.

gdy  $x = a \sin \omega t$

$y = b \sin \omega t$  tj dla  $\varepsilon = \frac{3\pi}{2}$ , bo wtedy

$$\cos(\omega t + \frac{3\pi}{2}) = \sin \omega t.$$

Ciekawsze przykłady składania ruchów dają równania:

$$x = a \sin \omega t$$

$$y = b \cos m \omega t \quad (m \text{ nat.})$$

Stawny jest przykład składania i rozkładania ruchów planet, które przypominają ruchy po epicykloidzie. Główna zastrzeżenie N. Kopernika polega właśnie na tem, że on widzi ruchy planet pojęt jako porowne i jako superpozycję ruchów ziemi, oraz obserwowanych planet. W ten sposób uprościł wiele spraw. Uproszczenie to nie musi zaraz opisywać istoty ruchów ciał niebieskich, czyni nam tylko pojmowanie ich daleko prostszym niż to czyniła rozrada Ptolomeusza.

4. Procz współrzędnych Kartezjuszkowskich lub wielkości pętorowych możemy jeszcze używać do opisu ruchu współrzęd-



nych biegunowych. np:



Fig 39.

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

gdzie  $r$  i  $\varphi$  są wielkościami zmiennymi.

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

Mozemy te predkości składowe złożyć w wypadkową:

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}.$$

Nobec dowolności składowania i rozkładania możemy, mając predkość  $V$  rozłożyć ją na składowe: w kierunku promienia wodzącego  $r$  i w kierunku normalnym do  $r$ .

W tym celu uwiaryamy jej składowe pierwsze  $u$  i  $v$ .

Z  $u$  przypadnie w kierunku promienia:  $u \cos \varphi$ , z  $v$  natomiast:  $v \sin \varphi$ ; w kierunku normalnej przypadnie z  $u$  wartość:  $-u \sin \varphi$ , zaś z  $v$  przypadnie:  $v \cos \varphi$ . (patrz Fig 39.)

Superponując teraz to wszystko dostajemy:

$$v_r = u \cos \varphi + v \sin \varphi$$

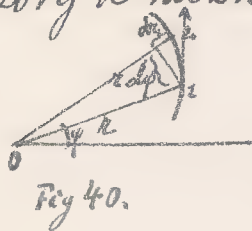
$$v_{\perp} = -u \sin \varphi + v \cos \varphi$$

Wstawiając w te wzory na  $u$  i  $v$  wartości poprzednio znalezione dostaniemy:

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

$$v_{\perp} = r \frac{d\varphi}{dt}$$

Wzory te można zresztą bezpośrednio wywnioskować. Gdy



punkt poruszy się od 1 do 2, r wzrośnie o Δr; więc stuszny poprzedni wzór pierwszy.

Odnosnie do drugiego, powiadamy, że wzrost n Δφ o kąt Δφ. Długość odcinka normalnego do r będzie n Δφ, więc znów wzór stuszny.

Przyspieszenie. Podobnie, jak do pojęcia prędkości dochodzimy z pojęcia drogi i czasu, tak też pojęcie przyspieszenia tworzymy na podstawie pojęcia prędkości i czasu. Określamy przyspieszenie: jako zmierność czasową prędkości. Znaczy się to, obserwujemy prędkości w dwu bliskich momentach czasu i tworzymy ich różnicę geometryczną i dzielimy przez czas. Przyspieszenie jest wielkością wektorową. Zauważymy, że wyrazu przyspieszenie "używamy tu w innym sensie niż skąd go potocznie używa, względnie zakres jego zwiększamy. W tem też znaczeniu mówimy o ruchu przyspieszonym po obwodzie koła, chociaż ruch ten odbywa się tak, że punkt w równych czasach zakresła równe łuki. Inicjuia się jednak tu kierunek. Wnypł słownych określeń znaczymy przyspieszenie:

$$a = \lim \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{dv}{dt}$$



Nobec pryzwrege nakowania  $\eta = \frac{dv}{dt}$

$$\eta = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = i \frac{d^2x}{dt^2} + j \frac{d^2y}{dt^2} + k \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Zatem przyspieszenie  $\eta$  można uważać za superpozycję przyspieszeń w kierunkach osi układu. Co do wartości bezwzględnej wyrazi się ono:

$$W = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Prędkość wypadkowa w każdej chwili ma kierunek styczny do toru. Z przyspieszeniem jest zupełnie odmiennie. Przyspieszenie nie jest w ogóle styczne. Analogicznie, jak wogóle wielkości wektorowe, rozkładamy też przyspieszenie. Często rozkładamy się przyspieszenie w kierunku stycznym do toru i normalnym; temu się więc tu zajmujemy. Dla prostoty założymy, że ruch rozpatrywany w tej chwili jest płaski. Prędkość  $V$  rozkładamy na  $u$  w kierunku osi  $x$ ów, i  $v$  w kierunku osi  $y$ ów:  $u = V \cos \gamma$ ,  $v = V \sin \gamma$ .

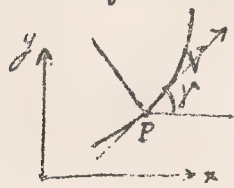


Fig 41

Odpowiednio przyspieszenia  $a_z$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{dV}{dt} \cos \gamma - V \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dV}{dt} \sin \gamma + V \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt}$$

Każde z tych przyspieszeń rozkładamy na przyspieszenie w kierunku stycznym i normalnym, a następnie przypadające przyspieszenia w tym samym kierunku superpo-

nujemy. Dostaniemy tak, jak to łatwo z ryciny 42. wywnioskować:

$$w_s = \frac{dx}{dt} \cos \gamma + \frac{dy}{dt} \sin \gamma$$

$$w_n = -\frac{dx}{dt} \sin \gamma + \frac{dy}{dt} \cos \gamma$$

Wstawiając w wyrażenia te za  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  wartości ich poprzedsze, znajdziemy:

$$w_s = \frac{dV}{dt}$$

$$w_n = V \frac{d\gamma}{dt}.$$

Przechodząc do pojęcia promienia krzywizny:  $R = \frac{ds}{d\gamma}$

$$ds = R d\gamma \quad \text{czyli} \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} \cdot V.$$

Wec wypisując jeszcze raz owe przyspieszenia, mamy:

$$w_s = \frac{dV}{dt}$$

$$w_n = \frac{V^2}{R}$$

Możnaby ze względu na przyspieszenie klasyfikować ruchy:

- 1).  $w_n = 0$ ,  $R = \infty$ ;  $w_s \neq 0$  nie zależy od kształtu drogi tylko od położenia 2 punktów po sobie; w tym razie będzie ruch prostoliniowy coraz szybszy, gdy  $w_s > 0$ , coraz wolniejszy, gdy  $w_s < 0$ .
- 2). Gdy  $w_n \neq 0$ ,  $w_s \neq 0$ , będzie ruch ogólnie krzywoliniowy kształtu zależnego od ułożenia przyspieszenia.

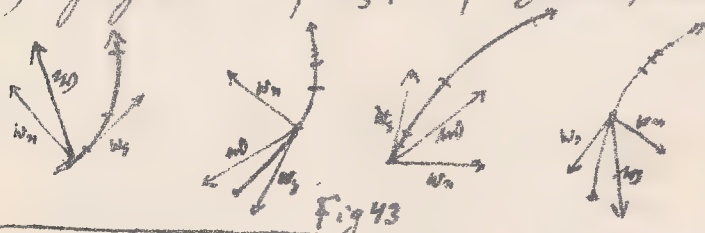


Fig 43



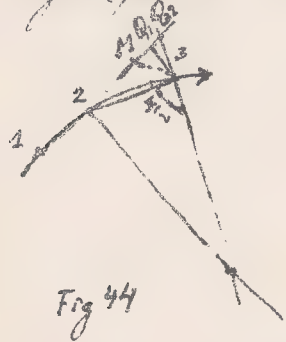
spierzeń  $w_s$  i  $w_n$  jak to ryc 43. zaznacza.

3).  $w_n = 0$ ,  $w_s = 0$ , ruch prostoliniowy jednostajny

4).  $w_n \neq 0$ ,  $w_s = 0$ , ruch krzywoliniowy, punkt w równych czasach zakreśla równe łuki.

Wzory poprzednie wyprowadziliśmy przy założeniu, że ruch odbywa się w płaszczyźnie. Są one jednak również ważne, gdy ruch odbywa się w przestrzeni. Do pojęcia przyspieszenia przynależą potoczenie trzech po sobie następujących punktów. Przez takie trzy punkty, lub co na jedno wychodzi dwie styczne, można zawsze poprowadzić płaszczyznę ściśle styczniową (oskulacyjną). Możemy tedy każdy ruch przestrzenny sprowadzić do szeregu ruchów płaskich. A stąd wzory nasze również ogólne.

Moznaby zresztą, wzory te udowodnić czysto geometrycznie, czego sposób tu stęścimy. Niech punkty 1, 2, 3 toru będą



odległe od siebie o jednostki czasu. Gdyby punkt materialny przebiegłszy tor 12 poruszał się dalej w kierunku stycznym znalazłby się po upływie jednostki

czasu w M. Wstacie znajdzie się on w punkcie 3. Dodałby przyspieszenia  $\frac{\vec{23} - \vec{2M}}{\Delta t} = \frac{\vec{M3}}{\Delta t}$ . Wektor  $\vec{M3}$  można uważać jako wypadkowy. W kierunku stycznym składowa jego jest:

:  $MQ_1 = 2\bar{Q}_1 - 2\bar{M}$ . Mierząc  $2\bar{Q}_1$  uważać za równe  $2\bar{3}$ . Stąd zaś

$$\lim \frac{MQ_1}{\Delta t} = \lim \frac{2\bar{3} - 2\bar{M}}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}.$$

W kierunku normalnym składowa wynosi  $\bar{Q}_1 \bar{3}$ . Należy:  $\bar{Q}_1 \bar{3} : 2\bar{3} =$

$$2\bar{3} : R \text{ jest } \frac{Q_1 \bar{3}}{\Delta t} = \frac{(2\bar{3})^2}{R} = \frac{v^2}{R}.$$

Na tem kończymy nasze rozważania dotyczące kinematyki punktu, a przystępujemy do dynamiki punktu.

## Dynamika punktu.

### Zasady mechaniki.

Już Galileusz przewidział niektóre prawa dynamiki punktu. Kalkulacje swoje w tym względzie sprawdził doświadczalnie. Już bardzo prosta obserwacja poucza nas, że ciału swobodnie poruszającemu się spada ku ziemi z coraz większą szybkością.

Galileusz zapytał się, według jakiego prawa ten ruch następuje; rozumowanie jego mogłobyś'ny tak wyrazić naszymi sposobami: Jeśli  $\frac{ds}{dt}$  wzrasta z czasem, to wzrost ten może być proporcjonalny do drogi. Przypuśćmy że tak jest, że zatem

$$\frac{ds}{dt} = as$$

i wyciągniemy stąd konsekwencje. Będzie

$$\frac{ds}{s} = a dt$$



$$\log s = \frac{-42-}{at} + \text{Const}$$

$$s = e^{\text{Const} + at} = A e^{at}$$

Dostaliśmy przy powyższem przypuszczeniu taki wzór na drogę. Oczywiście dla  $t=0$  musi być  $s=0$ . Według wzoru możliwe to jest tylko, gdy  $A=0$ . Jeśli zaś tak jest, to wogóle ruch taki jest niemożliwy, bo nigdy nie mógłby się rozpocząć. Zatem supozycja była fałszywa. Wobec tego nasunęła się Galileuszowi inna myśl, że spadochron będzie można ująć w formę:

$$\frac{ds}{dt} = gt$$

Wyciągnijmy z tego konsekwencje.

$$ds = gt dt$$

$$s = \frac{gt^2}{2} + C$$

Zatóż my znówu warunki początkowe, a więc dla  $t=0$ , musi być  $s=0$ . Wymaga to by,  $C=0$ . Warunek ten nie sprzeciwia się wcale doświadczeniom. Albowiem ze wzoru:

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

wyobrazamy, że ze wzrostem  $t$  wzrasta droga, co jest naturalne. A więc ujęcie to matematyczne faktu fizycznego może być słusne. Stwierdzić je atoli trzeba wielką ilością doświadczeń, co też Galileusz estolnie czynił. Najprawd on w tym celu równię pochyłą, bo wtedy prędkość ciała spadającego =  $gt \sin \alpha$

Przy tak urządzonem doświadczeniu rachunek nasz jest ścisły, bo cięto toczy się po równi pochytej, a toczenie się cięta wywiera wpływ na przyspieszenie, jak to zresztą w mechanice ciał sztywnych bliżej rozpatrzyć będziemy mieli sposobem. Stwierdził też Galileusz swe twierdzenia z wierzchołka tej w szkie. Biorąc różne równie pochyte, nachylone pod różnymi kątami, wyciągnął dalej Galileusz wnioski teoretyczne,



Fig 45.

że prędkość kulej od różnicy poziomu i że we wszystkich punktach tego samego poziomu prędkość jest jednakoowa. Gdy więc kulę się cięto poruszać w jednym i tym samym poziomie, to kulę to czynić z prędkością jednostajną. Tak doszedł Galileusz do prawa bezwładności opiewającego, że jeśli na cięto nie działa żadna siła, to zachowuje ono ruch prostoliniowy z prędkością jednostajną. Ze względu na to wiemy, że wobec panujących podówczas jeszcze poglądów Arystotelesa, były to myśli rewolucyjne.

Najbliższą formę uzyskał Newton w dziele: *Philosophiæ naturalis principia mathematica* w formie definicji wstępnych i praw ruchu (*leges motus*). W pierwszych określa masę, ilość ruchu i siłę:



Masa - powiada on - jest to ilość materji; określa się ją iloczynem objętości i gęstości, a mierzy się ją ciężarem ciała.

Łoś ruchu jest to iloczyn masy i prędkości.

Łoś jest to dożenie do zmianj stanu spoczynku lub ruchu jednortajnego prostoliniijnego.

Wzasa dach ruchu powiada:

1) Ciało zachowuje stan spoczynku lub ruch prostoliniowy jednortajny, póki siły zewnętrzne nie oddziaływają na nń.

2) Zmiana ruchu jest proporcjonalna do siły i odbywa się w kierunku siły.

3) Wzajemne działanĩa ciół na się są równe a odbywają się w przeciwnych kierunkach. (actio aequat reactioni)

Mechanika klasyczna winaję do dxiś prawa Newtona; musi się jednak przyznać, że forma ich wypowiedzenia jest bardzo wadliwa.\*)

Według logicznej analizy definiacja masy wtłściwie nie nń definiuje; nie można mowić „ilość materji“, bo ilości materji nie potrafimy mierzyć, pojecie zresztą materji jest wtłściwie metafizyczne. Dalej wprowadzając słowo „gęstń“ popełniamy circulus vitiosus, bo gęstń określa się znówu jako ilość masy w  $1 \text{ cm}^3$ . Dalej warzenie ciała polega na ku-

\*) Witkowski reformuje jwi w swem dziele ich wypowiedzenie. Franke stawia je jeszcze na czele.

Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Lex II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimatur.

Lex III. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.





potnie innych podstawach mianowicie grawitacji. Dalej w prawach ruchu powtarza Newton to samo, co powiecdniał w defini-  
cyach; i tak sřta jest dwa razy skřdłona. Stęd nie można  
wiedzieć czy leges motus sę prawami dořwiadczalnymi, czy  
teř definicyami.

Krytykę tę wykonał Mach w dziele: *Geschichte der Mechanik*  
 oraz *Poincaré*.

Kollig Macha narzeka trzeba postawić 3<sup>ie</sup> prawo Newtona,  
(*actio aequat reactioni*), ale tak je wypowiedzieć: Dořwiad  
czenie uczy nas, że ciała uokładają sobie przyspieszeń w kierunku  
ku tężnicy przeciwbierinych pod pewnymi warunkami, któ-  
rych badanię bliższe należy do fizyki dořwiadczałnej.

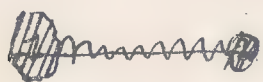


Fig 46.

To uokładanie sobie przeciwbierinych przyspieszeń  
może być uskutecznione juř to sprężyną juř też  
polega na siłach elektrycznych, magnetycznych, grawitacyjnych itp.

2) Dořwiadczenie uczy nas, że przyspieszenia między dwoma ciałami sę zawsze w stosunku niezmiennym niezależnie  
od wielkości tych przyspieszeń. Odwrotny stosunek przyspie-  
szeń odwrotny stosunek cięć mas. Stosunek:

$$w_1 : w_2 = m_2 : m_1$$

może nam być dany. Zależy on od rodzaju ciał, a nie

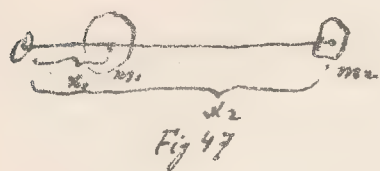


wielkości przyspieszeń.

3) Doświadczenie uczy nas, że stosunek mas jest ten sam, czy go znajdziemy bezpośrednio, czy za pośrednictwem ciała trzeciego.

Na podstawie tych praw mamy już sposób mierzenia mas. Jako jednostkę masy bierzemy 1 cm<sup>3</sup> wody w warunkach dokładnie określonych. Każdą inną masę wyrażamy jako wielokrotność tej jednostki.

Również definicję siły możemy teraz postawić. Wyrażając



przyspieszenia w formie:

$$w_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad w_2 = -\frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

możemy nasze słowne określenie za-

isać:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} \dots$$

Iloczyn z masy i przyspieszenia nazywamy siłą. Jest to określenie konwencyonalne, uzasadnione prostotą rachunku.

Prześmy ogólnie siłę  $X_i = m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}$

Wobec tych oznaczeń możemy teraz wypowiedzieć prawo:

Cała działają na się siłami równymi ale przeciwnymi.

$$X_1 = -X_2$$

Z tem baczny się jestore prawo niezerowości sił czyli prawo

składania i rozkładania sił. Opiewa ono: Doświadczenie uczy nas, że jeśli ciało porostaje pod działaniem różnych sił, to wpływy te superponują się. Należy że sił powoduje przyspieszenie niezależnie od pozostałych (Wielobok sił).

Wspomnieć należy, że prawo to stanowiło dowód spekulacyjny. Spekulacje jednak owe były fatalne, bo prawo to empiryczne.

Na podstawie powyższych definicji i praw doświadczalnych mamy sposób dynamiczny mierzenia sił, polegający na pomiaru wielkości przyspieszenia jakiego ciała udziela. W praktyce mierzy się siły sposobem statycznym polegającym na prawie współdziałania sił (równoważenie).

Reasumując teraz to, cośmy o podstawach mechaniki powiedzieli, widzimy, że składa się ona z dat doświadczalnych i konwencyonalnych. Tem właściwie wyczerpaliśmy już mechanikę, a to co dalej przyjdzie będzie zastosowaniem szczególnem.

## Ruch prostoliniowy.

Pęd = ilość ruchu. Pędem czyli ilością ruchu czyli jak to niektórzy nazywają momentem ruchu nazywamy iloczyn z masą i prędkości:

$$m \frac{dx}{dt}$$



Jest to definicya dowolna. Moglibyśmy na jej podstawie wyrazić poprostu określoną siłę:

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \right)$$

tj. siła jest pierwszą pochodną pędu. Warunek tego oznaczenia jest, by funkcya  $m \frac{dx}{dt}$ , czyli wobec zakładanej miłości stałości  $m$ , by  $\frac{dx}{dt}$  miała pochodną. Zresztą już wiemy wyżej zastrzeżli się, że nasze funkcye wprowadzane do określenia ruchu mają spełniać warunek ciągłości i mają mieć pochodną.

Popęd (impuls). Użyjemy na razie założenie, że ruch odbywa się po osi  $x$  prostoliniowo. Z poprzedniego określenia pędu mamy:

$$X dt = d \left( m \frac{dx}{dt} \right)$$

Wzrostanie ważne dla t.w. sił chwilowych. Jeśli biorąc kawałek siła trwa w czasie. Gdy mówimy o siłach chwilowych, to wybieramy sobie je jako jakies' pchnięcie bardzo szybko po sobie następujące, niesłychanie. Chcąc mieć powyższe wzrostanie w pewnych granicach czasu, napiszemy je:

$$\begin{aligned} \int_1^2 X dt &= \int_1^2 \left( m \frac{dx}{dt} \right) = m \frac{dx}{dt} \Big|_1^2 \\ &= m \left( \frac{dx}{dt} \right)_2 - m \left( \frac{dx}{dt} \right)_1 = m u_2 - m u_1 \end{aligned}$$

i tę całkę ze siły względem czasu nazywamy popędem.  
(impulsem)

Praca. Tworząc analogicznie całkę ze siły względem drogi, dostajemy definicję pracy (tu w szczególnym wypadku).

$$\int_1^2 X dx = \int m \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} dt = \int m \underbrace{\frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt}}_{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2} dt =$$

$$= \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \Big|_1^2$$

$$\int_1^2 X dx = \frac{m}{2} u_2^2 - \frac{m}{2} u_1^2$$

Iloczyn z połowy masy i kwadratu prędkości nazywamy energią kinetyczną. Równanie powyższe wyraża, że praca równa się różnicy energii kinetycznej w dwa chwile czasu. Równaniem tem mamy też wyrażony szczególny wypadek ogólnego prawa o zachowaniu energii mechanicznej. Z pomocą tak określonego pojęcia pracy możemy wrócić podobnie, jak przy pojęciu pędu, do pojęcia siły; oto jest:

$$X = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{2} u^2 \right]$$

tj. siła jest pierwszą pochodną z energii kinetycznej. Obie całki: siły względem czasu i siły względem drogi odgrywają wielką rolę w mechanice. My tworzyliśmy



nawet osobne metody, jedna posługująca się pojęciem pędu (Newton, Descartes), inna zaś energii kinetycznej (Leibnitz, Huygens). D'Alembert potrafił je obie, mówiąc że można się jedną i drugą stosownie do wygody pożytkować.

## 1. Dynamika punktu swobodnego.

Żadania, jakie napotykamy w mechanice są dwój-  
kie, albo mamy opisany ruch, a pytamy się jaka siła  
powoduje ten ruch, albo mając daną siłę pytamy  
się, jaki ona spowoduje ruch. Pierwszego rodzaju zadanie  
nie jest zazwyczaj łatwe. Przypominając sobie wzór na  
siłę  $X = m \frac{d^2x}{dt^2}$ , widzimy że potrzeba funkcję  $x$   
dwukrotnie upochodzić względem czasu  $t$  i utworzyć  
iloczyn masy i drugiej pochodnej. Postępujemy tak  
ogólnie, nie tylko zaś w szczególnym wypadku ruchu  
jaki teraz mamy przed oczyma tj ruchu wzdłuż osi  
 $x$  oś. Poimiej to uogólnimy, na razie zostając przy ruchu  
wzdłuż osi  $x$  oś, damy przykład takiego zadania:

1. Niech ruch określony będzie równaniem:

$$x = at + b$$

Mamy:  $\frac{dx}{dt} = a$   $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ . Stąd  $m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$  tj ruch

taki odbywa się bez działania siły.

2.  $x = \frac{g}{2} t^2 + at + b$ .

Bedzie:  $\frac{dx}{dt} = gt + a$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2} = g$ ,  $m \frac{d^2x}{dt^2} = mg$  tj. siła jest proporcjonalna do masy. Jest to siła grawitacyjna. Przyspieszenie, jakie ona powoduje jest liczbą stałą, prędkość proporcjonalna do czasu, lecz niezależna od masy. Stąd wszystkie ciała spadają - jak to prawo tu stwierdza - z jednakową prędkością.

3.  $x = (at + b)^{\frac{2}{3}}$

Bedzie:  $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3} a (at + b)^{-\frac{1}{3}}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2}{9} a^2 (at + b)^{-\frac{4}{3}}$ , zatem  $X = -\frac{2}{9} a^2 (at + b)^{-\frac{4}{3}} m = -\frac{2}{9} \frac{a^2 m}{x^2}$ . Bedzie to ruch, który się zaczyna z prędkością daną (dla  $t=0$ ). Potem skutkiem działania siły prędkość jego maleje. Dla  $t \rightarrow \infty$ , czyli w nieskończoność  $x \rightarrow \infty$ , prędkość  $= 0$ .

Trudniejsze są zadania drugiego rodzaju, gdy dane jest działanie siły, a pytamy jaki jest ruch przez nią spowodowany, a to z tego powodu że chodzi tu już o całkowanie. Sprawa ta byłaby względnie łatwa, gdyby funkcja wyrażająca siłę była funkcją czasu:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X = f(t)$$

Wtedy bowiem:  $m \frac{dx}{dt} = \int f(t) dt + C = \varphi(t) + C$



$$mx = \int \varphi(t) dt + Ct + a$$

O ile całkowania są wykonalne, to z równania ostatniego wypracujemy współrzędną  $x$  punktu i temsamem mamy już ruch opisany. W praktyce jednak nigdzie nie napotykamy siły wyrażonej jako funkcja czasu, jak doświadczenie nas uczy, chyba byśmy sobie sytuację taką siłą stworzyli. Zwykle napotykanne siły w mechanice zależą od położenia systemu, odległości punktów między sobą i prędkości poruszania się systemu. Do rozwiązywania takich zadań potrzebna już jest znajomość równań różniczkowych. W miarę potrzeby tedy wiadomości z nich będziemy sobie uzupełniać. Przypuśćmy teraz, że siła wyraża się jako funkcja współrzędnej  $x$ :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X = f(x).$$

W celu całkowania tej funkcji, wobec ciągłej dokładnej przez nas ciągłości naszych funkcji i ich regularności w uwzględnianym przedziale, dajmy na to (a...b) jest to równanie dowolne\*), napiszmy:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} dt = f(x) dx$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

\*) Warunki przez nas podane są aż nadto wystarczające. Bliżej tutaj: Zastosowania do teorii mnogości prof. Sierpińskiego, Równania różniczk. p. Sierpińskiego etc.

czyli

$$d\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = f(x)dx, \text{ skąd}$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \int f(x)dx + C$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{C + \int f(x)dx}$$

Tak otrzymaliśmy prędkość jako funkcję odległości. Stąd

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C + \int f(x)dx}} = \sqrt{\frac{2}{m}} \int dt + a = \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{m}} + a$$

Gdy te całki wyliczymy, dostaniemy  $x$  jako funkcję czasu, a przez to zadanie nasze jest już uskutecznione. Na powyższe postępowanie damy przykłady:

1) Siła sprężysta nazywamy taką, która jest proporcjonalna do wychYLENIA masy  $m$  z pozycji równowagi i stara się tę masę do pozycji równowagi wrócić (przeciwdziała wychyleniu). Określi się jej tedy równaniem różniczkowym:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha x$$

Pytamy się jaki ruch powstanie skutek tej siły. Na mocy powyższych uwag przeprowadzimy tak rachunek:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} dt = -\alpha x dx$$

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{\alpha x^2}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2C - \alpha x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{m}} + a = \frac{t}{\sqrt{m}} + a$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2C - \alpha x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2C}} \int \frac{d\frac{\alpha x}{\sqrt{2C}}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha x^2}{2C}}}$$

$$\text{Kładąc } x\sqrt{\frac{\alpha}{2C}} = z$$



o dostajemy:  $\frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin z = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin x \sqrt{\frac{a}{2c}}$

Wracając do wzoru poprzedniego, mamy:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin x \sqrt{\frac{a}{2c}} = \frac{t}{\sqrt{m}} + \alpha$$

$$\arcsin x \sqrt{\frac{a}{2c}} = \sqrt{a} \left( \frac{t}{\sqrt{m}} + \alpha \right) ; \text{znacząc } a\sqrt{a} = \varepsilon$$

mamy:

$$\sin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} t + \varepsilon\right) = x \sqrt{\frac{a}{2c}}$$

$$x = \sqrt{\frac{2c}{a}} \sin\left(t \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} + \varepsilon\right)$$

Mamy więc  $x$  wyrażone jako funkcję  $t$ . Wchodząc w to równanie dwie stałe całkowania  $\varepsilon$  i  $c$ . Chodzi o ich określenie. W tym celu zwracamy się do danych doświadczalnych. B. wiademy, że jest nam dane położenie punktu  $m$  w pierwszej chwili i prędkość. Określimy je dla krótkości  $\sqrt{\frac{2c}{a}} = A$ :

$$x = A \sin\left(t \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} + \varepsilon\right)$$

Nobis więc tego cośmy powiedzieli, niech dla  $t=0$ , będzie  $x=x_0$ .  
 $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0$ . Pierwszy warunek można wstawić wprost w nasze równanie. Bezpośrednio:

$$x_0 = A \sin \varepsilon.$$

Aby można skorzystać z drugiego warunku, wystarczy nasze równanie upochodzić względem  $t$ :

$$\frac{dx}{dt} = A \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \cos\left(t \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} + \varepsilon\right). \text{ Stąd}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = A \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \cos \varepsilon$$

Z obu tych równań przy powyżej wspomnianych warunkach

kach zachodzących obliczymy stałe  $A$  i  $\varepsilon$ . Wstawiając  $(\frac{dx}{dt})_0 = u_0$  i dzieląc równanie górne przez dolne, mamy na stałą  $\varepsilon$ , równość:

$$\lg \varepsilon = \frac{x_0}{u_0} \sqrt{\frac{m}{\alpha}}$$

Nobis  $\cos 2 = \frac{1}{\sqrt{1+\lg^2 \varepsilon}}$ ,  $u_0 = A \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\lg^2 \varepsilon}}$ , dostajemy na stałą  $A$  równość:

$$A = u_0 \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \cdot \sqrt{1+\lg^2 \varepsilon} \quad (\text{amplituda}).$$

Zauważmy jeszcze równania ruchu wypowiadać w słowach dla poszczególnych chwil czasu. Rozpatrujemy przez to przebieg ruchu i rozpatrywanie to rowniemy dyskusyą. Np. o ruchu przez nas rozpatrywanym powiemy, że jest on periodycznym, bo taką jest funkcja sin. Jaki jest okres, tj. jaka jest liczba, dla której funkcja z argumentu  $t$  otrzymuje wartość tę samą co np. dla  $t=0$ . Ze znajomości funkcji trygonometrycznych wynika, iż będzie ten warunek spełniony dla takiego  $t=T$ , aby

$$T \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = 2\pi, \text{ skąd}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \quad \text{czas okresu (okres)}.$$

2) Siła, która przeciwdziała prędkości chwilowej i jest do niej proporcjonalna (ogólnie jest funkcją prędkości), nazywamy oporem (tarciem). Przykłady takich sił są bardzo częste w mechanice np. kropelka opadająca, lecący pocisk.



itd. Znany jest wzór na opór  $X = -6\pi\mu a u$  u którego domaga kulka o promieniu  $a$  poruszająca się z prędkością  $u$  w ośrodku lepkiem, którego współczynnik lepkości jest  $\mu$ . Wzór taki ważny dla prędkości małych tylko, dla ruchów szybkich przestaje być ważny. My założymy racjonalnie:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\beta \frac{dx}{dt} \quad (\text{więc } \beta = 6\pi\mu a)$$

Kcelu całkowania napiszmy to:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} dt = -\beta dx \quad \text{stad}$$

$$m \frac{dx}{dt} = -\beta x + \alpha$$

$$m \int \frac{dx}{\alpha - \beta x} = \int dt$$

$$-\frac{m}{\beta} \log(\alpha - \beta x) = t + C'$$

$$\log(\alpha - \beta x) = -\frac{\beta}{m} t + C \quad \text{gdzie } C = -\frac{C'}{\beta}$$

$$\alpha - \beta x = e^{C - \frac{\beta t}{m}} = B e^{-\frac{\beta t}{m}}$$

$$x = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{B}{\beta} e^{-\frac{\beta t}{m}}$$

Do oznaczenia dwu stałych całkowania  $\alpha$  i  $B$  niech nam będą dane dwie daty np. dla  $t=0$ , niech będzie:  $\frac{dx}{dt} = c$ , oraz  $x=0$ . Stad

$$\alpha - B = 0$$

$$\alpha = B$$

tj obie stałe są sobie równe.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B}{m} e^{-\frac{\beta t}{m}}; \text{ stad dla } t=0$$

$$C = \frac{B}{m}, \quad B = mC = \alpha$$

Wprowadzając te warunki do równania kinetycznego, ruchu, mamy:

$$x = \frac{mc}{\beta} [1 - e^{-\frac{\beta t}{m}}]$$

Ze kinetycznego wzoru na prędkość wnioskujemy, że prędkość ta mając początkową wartość  $c$  maleje do zera dla  $t = \infty$ ;  $x$  natomiast wzrasta zbliżając się asymptotycznie do granicznej wartości  $\frac{mc}{\beta}$ .

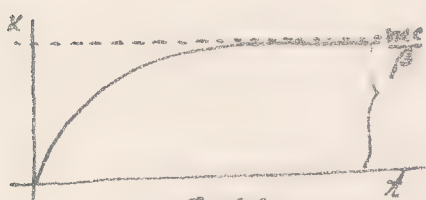


Fig 48.

Możemy unosić sobie przebieg ruchu graficznie, kreśląc w układzie prostokątnym dla osi  $t$  i  $x$  wartości funkcji  $x$  dla odpowiednich wartości argumentu  $t$ .

3) Inny jeszcze przykład na opór:

$$X = -\beta \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

Wielu całkowania założymy:  $\frac{dx}{dt} = u$ , wtedy  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}$ .

Zatem

$$m \frac{du}{dt} = -\beta u^2$$

$$\frac{m du}{u^2} = -\beta dt \quad \text{Całkując, mamy}$$

$$-\frac{m}{u} = -\beta t + \alpha \quad \text{Stąd}$$

$$u = \frac{m}{\beta t - \alpha} = f(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$x = \int f(t) dt + \text{const.}$$

Całkowanie to da się już łatwo dokonać. Podobnie przeprowadzi się rachunki w wypadku, gdy uwzględnimy jeszcze siłę ciężkości np. przy spadaniu kropli mgły. Równa-



nie będzie ówczas takie:  $m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - \beta \frac{dx}{dt}$ . Rozpatrzemy to bliżej w Ćwiczeniach.

Po tych przykładach ruchu po linii prostej możemy porównania nasze uogólnić na ruch w przestrzeni. Podstawę do tego rozszerzenia daje nam prawo niezależności sił, oznaczające, jak wiemy, że siły składowe nie przeszkadzają sobie i że siły możemy składać i rozkładać. Wzrowania nasze wprowadzimy trzy siły, działające w kierunkach osi:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

Jedno przytem czynimy zastrzeżenie, że kierunki sił  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  są nieruchome, co zresztą już wynika z przyjęcia stałego układu. Wprowadziliśmy przedtem w odniesieniu do ruchu po linii prostej pojęcia: prędkość, przyspieszenie, pracy, energii kinetycznej. Otóż teraz pojęcia te uogólnimy dla ruchu w przestrzeni, wyrażając je rachunkiem wektorowym i sposobami geometrii analitycznej:

Wyrażone dopiero co trzy siły składowe, wyrazimy w rachunku wektorowym:

$$\mathbf{f} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d^2}{dt^2}(ix + jy + kz) = iX + jY + kZ$$

Wiemy, że prędkość w rachunku wektorowym m wyraża się

$$v = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{r' - r}{t' - t} = \frac{dr}{dt}$$

przypiciecie  $av = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$ . Skąd siła wyraża się inaczej tu:

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{d}{dt}\left(m \frac{dr}{dt}\right)$$

To wyrażenie odpowiada wprowadzonemu wyżej wyrażeniu siły przez ped, tylko tam (str. 48.) odnosiliśmy je do ruchu prostoliniowego, tutaj zaś jest ono odniesione do ruchu w przestrzeni. Możemy je rozłożyć na trzy:

$$X = \frac{d}{dt}\left(m \frac{dx}{dt}\right)$$

$$Y = \frac{d}{dt}\left(m \frac{dy}{dt}\right)$$

$$Z = \frac{d}{dt}\left(m \frac{dz}{dt}\right)$$

przez co już jesteśmy na gruncie geometrii analitycznej.

Analogicznie uogólniamy pojęcie popędu, pisząc:

$$\int_1^2 F dt = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - v_1)$$

gdzie różnica  $m(v_2 - v_1)$  jest rozumiana, jak wogóle w rachunku wektorowym, w sensie geometrycznym. Np.

po obwodzie koła gdy się ruch odbywa, to nie ma różnicy bezwzględnej prędkości, bo ruch jest jednostajny, tylko jest różnica geometryczna.

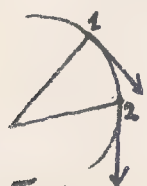


Fig 49.

Rozpisując powyższą całkę względem czasu,



dostaniemy znów trzy równania:

$$\begin{aligned}\int_1^2 X dt &= m \left( \frac{dx}{dt} \right)_2 - m \left( \frac{dx}{dt} \right)_1, \\ \int_1^2 Y dt &= m \left( \frac{dy}{dt} \right)_2 - m \left( \frac{dy}{dt} \right)_1, \\ \int_1^2 Z dt &= m \left( \frac{dz}{dt} \right)_2 - m \left( \frac{dz}{dt} \right)_1\end{aligned}$$

Teraz uogólnimy jeszcze pojęcie pracy i energii kinetycznej, wychodząc z równań Newtonowskich:

$$\begin{array}{l|l} m \frac{d^2x}{dt^2} = X & dx \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = Y & dy \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = Z & dz \end{array}$$

które pomnożymy odpowiednio przez  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , dodamy do siebie i weźmiemy całki w granicach 1...2:

$$\begin{aligned}m \int_1^2 \left( \frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz \right) &= \int_1^2 (X dx + Y dy + Z dz) \quad \text{czyli} \\ m \int_1^2 \left( \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{dz}{dt} \right) dt &= \int_1^2 (X dx + Y dy + Z dz), \quad \text{co daje} \\ \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right]_1^2 &= \int_1^2 (X dx + Y dy + Z dz) \quad \text{czyli} \\ \frac{m}{2} V_2^2 - \frac{m}{2} V_1^2 &= \int_1^2 (X dx + Y dy + Z dz) \quad \text{lub wreszcie} \\ \frac{m}{2} V_2^2 - \frac{m}{2} V_1^2 &= \int_1^2 (X dx + Y dy + Z dz) = P_1^2\end{aligned}$$

Równanie to przedstawia definicję pracy ogólnie przy ruchu krzywoliniowym w przestrzeni. Praca wykonana przy przesunięciu masy z punktu 1 do 2, równa się

różnicy energii kinetycznych w obu tych punktach. Dla uściśnienia ogólności powyższej definicji: pracy dodamy jeszcze rysunek. Niech punkt materialny  $m$  poruszy się

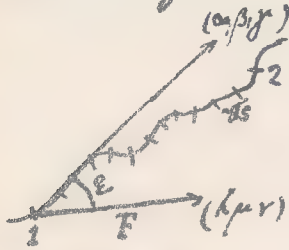


Fig 50.

po łuku krzywoliniowym w przestrzeni od 1 do 2. Siła  $F$  działająca nań nie potrzebuje być styczną do krzywej owej, ma ona kierunek oznaczony  $(l, \mu, \nu)$

Podzielmy tor, po którym punkt się poruszył na elementy o długości  $ds$ . Elementami składowymi każdego takiego elementu w kierunkach osi układu prostokątnego będą:

$$dx = \frac{dx}{ds} ds = ds \cos \alpha$$

$$dy = ds \cos \beta$$

$$dz = ds \cos \gamma$$

gdzie  $\alpha, \beta, \gamma$  oznaczają kąty, jakie kowektorowa stykana z osiami układu zawiera. Analogicznie składowe siły  $F$  będą:

$$X = F \cos \alpha$$

$$Y = F \cos \beta$$

$$Z = F \cos \gamma$$

Według definicji pracy, mamy:

$$P_1^2 = \int_1^2 F (\underbrace{\cos \alpha \cos l + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu}_{\cos \epsilon}) ds$$

Jeśli  $\epsilon$  oznacza kąt między kierunkiem siły  $F$  a styczną do krzy-



wej nawarty, to całka ta w dalszym ciągu

$$= \int_1^2 F \cos \varepsilon ds,$$

$F \cos \varepsilon$  oznacza składową siły  $F$  przypadającą w kierunku stycznej; znacząc ją dla krótkości  $F_s$ , napiszemy definicję pracy:

$$P_1^2 = \int_1^2 F_s ds$$

Mówi się często praca równa się iloczynowi siły i drogi; o to rozumie się tu: siłę w kierunku drogi. Moglibyśmy teraz też zależeć między energią kinetyczną, a pracą wykonaną przy przesunięciu punktu materialnego  $m$  z punktu 1 do 2, napisać:

$$\frac{m}{2} V_2^2 - \frac{m}{2} V_1^2 = \int_1^2 F_s ds.$$

To ostateczne określenie pracy jest bardzo zbliżone do tego, jakie dajemy w symbolice wektorowej. Oto mech  $f$  w symbolice wektor-



Fig 51.

rowej oznacza siłę o pewnym kierunku. Jeśli przystać, po której się punkt materialny porusza wyrażony przez wektor  $r$  (str 21), to

element toru, to cosinus wyżej znaczący  $\cos \varepsilon$ , napiszemy teraz dr.

Określenie pracy będzie:

$$P_1^2 = \int_1^2 (f dr)$$

gdzie  $(f dr)$  oznacza iloczyn skalarny. Ten wyrażenie wypisany jest:  $f dr = m \frac{dr}{dt} dr = m \frac{dr}{dt} \frac{dr}{dt} dt$ , skąd

$$\int_1^2 f dr = \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} v_2^2 - \frac{m}{2} v_1^2$$

identyczne z wyrzuceniem poprzecznym.  $v_2^2$  i  $v_1^2$  są to już wielkości bezwzględne. Pracę elementarną, możemy powiedzieć, wyraża się w symbolice wektorowej iloczynem skalarnym siły i przesunięcia.

Wprowadzimy jeszcze pojęcie potencjału i sił potencjalnych czyli konserwatywnych. Z pojęciami temi zettknijemy się bliżej później. Określamy: jeśli siły składowe można wyrazić jako cząstkowe pochodne jakiejś funkcji  $U = f(xyz)$  względem jej argumentów  $x, y, z$  ze znakiem  $-$ , a więc

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$Y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$Z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

to siły te składowe oraz ich wypadkową nazywamy potencjalnymi, funkcję zaś:

$$U = f(xyz)$$

nazywamy potencjałem.

Utwórzmy całkę, taką jakąśmy wyżej tworzyli przy definicji pracy:

$$\int_1^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) =$$



Funkcja podcałkowa przedstawia różniczkę zupełną -dU.

Stąd:

$$\int_1^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = -U \Big|_1^2$$

Nobee wielokrotnie wyżej wypisywanych wzorów mamy stąd:

$$\frac{m}{2} V_2^2 - \frac{m}{2} V_1^2 = U_1 - U_2 = f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)$$

czyli:

$$\frac{m}{2} V_1^2 + U_1 = \frac{m}{2} V_2^2 + U_2$$

Gdybyśmy jeszcze raz wypisali powyższą całkę z granicami jednak 1...3, dostalibyśmy:

$$\frac{m}{2} V_1^2 + U_1 = \frac{m}{2} V_3^2 + U_3.$$

Postępując tak dowolną ilość razy, mamy ogólnie:

$$\frac{m}{2} V_1^2 + U_1 = \frac{m}{2} V_2^2 + U_2 = \frac{m}{2} V_3^2 + U_3 = \dots = \text{Const.}$$

Znaczą się to, że suma z energii kinetycznej i potencjału lub jak to zwykłe mówimy: suma z energii kinetycznej i potencjalnej jest dla każdorazowego położenia punktu materialnego wielkością stałą przy założeniu, że siły obrotające się potencjalne. Siły te nazywamy też skutkiem zachowania się w ciągle równej wielkości energii, która w tym razie nazywamy mechaniczną, siłami konserwatywnymi (zachowawczymi). Prawo zaś powyższe nazywamy prawem o zachowaniu energii mechanicznej.

Silami konserwatywnymi są np. siły grawitacyjne, elektrostatyczne, magnetyczne. Dla siły ciężkości potencjał przedstawia nam  $U = mgy$ . Istotnie gdy tworzymy cząstkowe pochodne, dostajemy:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -mg, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

co zgadza się z wzorami na siły składowe działające przy swobodnym spadaniu ciała:  $X=0, Y=-mg, Z=0$ .

Jeśli nie istnieje taka funkcja  $U = f(x, y, z)$ , żeby można przez nią siły w powyższy sposób wyrazić, natenczas siły nie są konserwatywne i prawo zachowania energii mechanicznej wtedy jest nie ważne. Łatwo sobie takie siły skonstruować np.:  $X = \alpha xy$ ,  $Y = \beta$ ,  $Z = 0$ . Powiadam, że siły te nie są potencjalne. Jak się o tem przekonać? Oto wykazać łatwo, że siły te nie spełniają koniecznych warunków sił potencjalnych. Upochadniając siły potencjalne (Str. 63) dostajemy warunki konieczne:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

Czyniąc to samo dla sił tych dostajemy:  $\frac{\partial X}{\partial y} = \alpha x$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$ ; zatem warunki niespełnione. Siły takie nazywamy rozpraszającymi. Takimi są np.: tarcie, opór ośrodka itp. W nich energia mechaniczna znika zamieniając się na c-



energii ciepłej. Wogólnym tedy sensie prawo o zachowaniu energii pozostaje warnem. Z siłami potencyalnymi w praktyce prawie nigdy się nie spotykamy; są one tylko ideałami; z siłami rozpraszającymi natomiast na każdym kroku.

Widzieliśmy dotychczas, że jeśli siły są potencyalne to warne jest prawo o zachowaniu energii mechanicznej. Twierdzenie to jest odwracalne; jeśli jest warne prawo o zachowaniu energii mechanicznej, to siły dadzą się wyrazić jako potencyalne. Przyjmijmy więc jako zachodzące prawo zachowania energii mechanicznej:

$$\int_1^2 (Xdx + Ydy + Zdz) = U_1 - U_2$$

gdzie  $U_1 = U(x_1, y_1, z_1)$ ,  $U_2 = U(x_2, y_2, z_2)$ . Lewa strona powyższego równania przedstawia nam pracę wykonaną przy przesunięciu masy od punktu 1 do 2. Wyobraźmy sobie

 drogę od 1 do 2 i weźmy się ona przesunie o  $dx$ .

1952. Jaka potrzeba jest do tego praca elementarna?

Będzie to iloczyn ze siły  $X$  i elementu drogi  $dx$ .

Z prawej zaś strony będzie różniczka funkcji  $U$ . Będzie więc

$$X\Delta x = U(x, y, z) - U(x + \Delta x, y, z)$$

Rozwijając prawą stronę według Taylora, jest to tu dozwolone, bo funkcja  $U$  ma oznaczone wartości i pochodne, dostu-

niemy po zmniejszeniu się pierwszego wyrazu:

$$X \Delta x = - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dots$$

Co opuszczeniem wyrazów począwszy od drugiego, dostajemy:

$$X \Delta x = - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}$$

Analogiczne przesunięcie można by sobie pomyśleć względem  $y$  i  $z$ . Dostaniemy: tak samo:

$$Y \Delta y = - \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$Z \Delta z = - \Delta z \frac{\partial u}{\partial z}$$

Stąd zaś mamy:  $X = - \frac{\partial u}{\partial x}$

$$Y = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$Z = - \frac{\partial u}{\partial z}$$

co dowodzi słuszności naszego twierdzenia.

Damy teraz jeszcze przykłady ruchu odbywającego się w przestrzeni.

1. Ruch ciała ruszonego bez uwzględnienia oporu. Ruch ciała ruszonego pod kątem dowolnym do poziomu  $x$ , gdy nie zwracamy uwagi na opór powietrza, odbywa się pod wpływem sił:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = - m g$$

Trzeba by właściwie dodać jeszcze jedno równanie. Przewidujemy jednak, że ruch będzie płaski i dlatego trzeciego wymiaru  $z$

nie uwzględniamy: Wobec możliwości składowania i rozkładania sił i wynikającej z tego możliwości składowania i rozkładania prędkości oraz dróg, postępujemy z kanonem z danymi nam równaniami, które są równaniami współczesnymi, tak jakby każde z nich samo tylko było. Tu więc wykonując kolejne całkowania dostajemy:

$$\frac{dx}{dt} = b_1 \quad x = a_1 + b_1 t$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt + b_2 \quad y = -gt^2/2 + b_2 t + a_2$$

Dostaliśmy tak równania ruchu, w które wchodziły cztery stałe całkowania:  $a_1, b_1, a_2, b_2$ , które określimy za pomocą warunków początkowych i prędkości początkowej. Założymy teraz, żeśmy tak dobrali układ nasz, że dla  $t=0$ , będzie  $x=y=0$ , prędkości zaś początkowe będą:  $(\frac{dx}{dt})_0 = b_1$ ,  $(\frac{dy}{dt})_0 = b_2$ . Widać wprost z równań, że  $a_1 = a_2 = 0$ . Równania nasze uprościmy więc do formy:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 t$$

$$x = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 t$$

Można je jeszcze inaczej napisać, z uwagi, że prędkość wypadkowa  $c = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0^2}$  jest nachylna do osi  $x$  pod kątem  $\alpha$ , i że stąd



Fig 53.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = c \cos \alpha \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = c \sin \alpha, \text{ a mianowicie:}$$



$$y = -\frac{gt^2}{2} + ct \sin \alpha$$

$$x = ct \cos \alpha$$

Gdybyśmy z tych dwu równań wyznaczyli  $ct$ , dostalibyśmy równanie paraboli. Ruch więc odbywa się po paraboli. Prędkość początkowa jest dana. Ze wzrostem czasu prędkość składowa  $\frac{dy}{dt}$  stale maleje. Wartość zero będzie miała, gdy  $-gt + c \sin \alpha = 0$ , czyli dla  $t = \frac{c \sin \alpha}{g}$ . Potem będzie już miała wartość ujemną. Wartość jednak  $c$ , wobec stałości  $\frac{dx}{dt}$  będzie początkowo tylko do czasu  $t = \frac{c \sin \alpha}{g}$  maleć, potem zaś będzie wzrastać.

Dla  $t = \frac{c \sin \alpha}{g}$  osiągnie funkcja  $y$  maximum, tj. będzie to najwyższy (kulminacyjny) punkt, jaki ciało rzucone osiągnie. Spadnie zaś na ziemię, czyli  $y = 0$ , dla czasu  $t = \frac{2c \sin \alpha}{g}$ .

Stąd wnioskujemy, o symetryczności drogi wrzucenia i spadania i o dalekości rzutu. Wynosić ona będzie:

$x = \frac{2c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$ . Równaniu rządowi  $\alpha$  odpowiada dwie wartości na kąt  $\alpha$ , a mianowicie  $\alpha$  i  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ . Stąd za pomocą dwu elewacji możemy osiągnąć tę samą odległość; znajduje to zastosowanie w strzelaniu z moździerzy.

Mogłaby dla tego ruchu stwierdzić prawo o zachowaniu energii mechanicznej. Siły tu działające są potencjalne, a potencjał, jakiemu to już na str. 65 zauważyli jest  $U = mgy$ .

Jestli ma zachować prawo zachowania energii, to musi zachować równanie:  $\frac{m}{2} V^2 + U = \text{Const.}$  Mamy cis dla naszego

ruchu:  $V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (c \cos \alpha)^2 + (-gt + c \sin \alpha)^2 =$

$$= c^2 + g^2 t^2 - 2gt c \sin \alpha. \text{ Wstawiając to w powyższe równanie}$$

dostajemy:  $(c^2 + g^2 t^2 - 2gt c \sin \alpha) \frac{m}{2} + (-gt + c \sin \alpha) mg = \frac{m c^2}{2} = \text{Const.}$

2. Rozważmy teraz ruch ciała ruchomego pod pewnym kątem do poziomu i uwzględnijmy opór powietrza. Przyjmijmy, że opór ten jest proporcjonalny do pierwszej potęgi prędkości. Z założenia to czynimy dla prostoty rachunku, a możemy je czynić i pewno nawet oddawać <sup>po znacznem przybliżeniu</sup> rzeczywisty przebieg ruchu, mając experimentalnie stwierdzone prawo proporcjonalności oporu do prędkości. Od nas tedy zależy, jakie ciało ma mieć opór w czasie ruchu, bo możemy dostosować prędkości. Wobec tego założymy opór  $\Omega = -\beta V$ . Przewidyując znowe, że ruch będzie płaski, zbudujemy równania:

$$X = -\beta V \cos \gamma$$

$$Y = -mg - \beta V \sin \gamma$$



Fig 54.

gdzie  $\gamma$  oznacza kąt zawarty między chwilową styczną do krzywej drogi, a poziomem.

Wobec tego, że  $\frac{dx}{dt} = V \cos \gamma$ ,  $\frac{dy}{dt} = V \sin \gamma$ , możemy napisać równania nasze w formie odmienniej:

$$m \frac{dx}{dt} = -\beta \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{dy}{dt} = -mg - \beta \frac{dy}{dt}$$

Każde z tych równań wobec nierozdzielności ich wyrażeniowej możemy oddzielnie całkować. Pierwsze z tych równań jest takie samo jak w przykładzie 2. str. 56. Mając równania różniczkowe takiego kształtu, wiemy z góry, że całka jego będzie funkcją eksponencyjną z dwoma stałymi całkowania. Zgodujemy, że będzie to

$$x = A e^{-\frac{\beta}{m}t} + B$$

Uproszczając tak znowelizowaną całkę dwukrotnie i wstawiając wartości na  $\frac{dx}{dt}$  i  $\frac{d^2x}{dt^2}$  w równanie różniczkowe, wiźdriemy, że się sprawdzi.

W celu rozwiązania drugiego równania różniczkowego, kładziemy:

$$\frac{dy}{dt} = v \quad \text{Stąd}$$

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \beta v$$

$$\frac{m dv}{mg + \beta v} = -dt$$

Co całkując i nakładając wypowiadający -log mg do stałej dostajemy

$$\log(mg + \beta v) = -\frac{\beta}{m}t + C$$

$$mg + \beta v = e^{C - \frac{\beta}{m}t}$$

$$\frac{dy}{dt} = v = -\frac{mg}{\beta} + \frac{e^{C - \frac{\beta}{m}t}}{\beta}$$

$$y = -\frac{g}{\beta}t + \frac{C}{\beta}e^{-\frac{\beta}{m}t} + D$$



Dostaliśmy tak dwie palki  $x$  i  $y$  z czterema stałymi całkowania  $A, B, C, D$ .

Przystąpimy do oznaczenia tych stałych z warunków początkowych. Ponieważ chcemy znaleźć wyjaśnienie czterech stałych, więc damy sobie cztery warunki początkowe. Niech mianowicie dla  $t=0$ , będzie  $x=0, y=0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = c \sin \alpha, \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = c \cos \alpha$ . Skąd zaraz mamy:  $A = -B; D = C$ ;

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = -\frac{gm}{\beta} + \frac{C\beta}{m} = c \sin \alpha$$



Fig 55

$$C = D = \frac{mc \sin \alpha}{\beta} + \frac{m^2 g}{\beta^2} = \frac{m}{\beta} \left( c \sin \alpha + \frac{mg}{\beta} \right)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -\frac{\beta}{m} A e^{t \frac{\beta}{m}} \Big|_{t=0} = -\frac{\beta}{m} A = c \cos \alpha$$

$$A = -B = -\frac{m}{\beta} c \cos \alpha$$

Nadaje jeszcze dla krótkości  $\frac{\beta}{m} = k$  i wstawiając to wyrażenie w nasze równania ruchu, napiszemy je w postaci:

$$x = \frac{c \cos \alpha}{k} (1 - e^{-kt})$$

$$y = -\frac{g}{k} t + \frac{1}{k} \left( c \sin \alpha + \frac{g}{k} \right) (1 - e^{-kt})$$

Dyskusja tych równań ruchu jest już nieco trudniejsza, bo wyrażenia są złożone. Zastanówmy się np. najpierw, jaki będzie tor w różnych chwilach czasu. Co do potrzebienia początkowego, to mamy z warunków do oznaczenia stałych całkowania, że  $x=0$  i  $y=0$ .

Odpowiadając na pytanie, że dla wrażliwego  $t$  wartość  $x$ , ale tylko do pewnej granicy. Dla  $t = \infty$ ,  $x = \frac{c \cos \alpha}{\lambda}$ .

Dla dyskusji równania na  $y$ , zauważymy, że jest to wyrażenie złożone z dwóch członów, z których pierwszy jest stałe ujemny, drugi stałe ujemny, wznoszący się w miarę  $t$  tylko do pewnej górnej granicy asymptotycznie. (Zauważamy, że  $c$ ,  $\sin \alpha$ ,  $g$ ,  $\lambda$  są dodatnie). Dla małego  $t$  drugi człon ma przewagę, wartości na  $y$  są dodatnie, przy pewnym  $t$  ma  $y$  wartość maksymalną, potem występuje drugi człon prze-

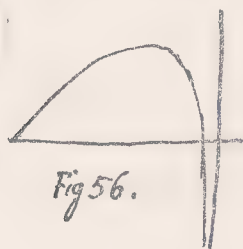


Fig 56.

wagę i czoło przesuwa, jak to już łatwo wi-  
doć, stalemnie się zmienia zbliżając się a-  
symptotycznie, do pewnej prostej równo-  
ległej do osi  $y = \text{const}$  w oddaleniu od początku  
układu o  $\frac{c \cos \alpha}{2}$ . Ruch się więc odbywa po zdeformowa-  
nej paraboli. Analogicznie możemy się pytać o to, jakie pręd-  
kości ma czoło w tych warunkach w różnych czasach. Pr-  
zedtem mieliśmy wielkości prędkości składowych dla  $t=0$ . Wy-  
ty to mianowicie  $(\frac{dx}{dt})_0 = c \cos \alpha$ ,  $(\frac{dy}{dt})_0 = c \sin \alpha$ . Zapytamy, ja-  
kie będą dla  $t = \infty$ ; oto  $(\frac{dx}{dt})_\infty = 0$ ,  $(\frac{dy}{dt})_\infty = -\frac{g}{\lambda}$ . Wnioskujemy  
stąd, że po upływie bardzo długiego czasu czoło porusza

są będzie a prędkość prawie jednostajną, bo przeciw  $-\frac{g}{2}$  jest siłko stałe. Ciekawy to i może nie porównany siosek. Można by sobie postawić pytanie, jak się będzie odbywał ruch, gdy założymy, że to w praktyce ma zastosowanie, że opór jest proporcjonalny do kwadratu, sześciangu, czwartej potęgi prędkości. Oczywiście, że są to już uogólnienia trudniejsze, to już trzeba będzie od siebie pomniejszyć, by można było coś powiedzieć. Zauważymy tu tylko, że opór środka odgrywa tu bardzo znaczny wpływ. Widac' to np. Stąd, że siła karabinu wojkowego, z którego pocisk wylatuje z prędkością 600 msek bez oporu powietrza wyniosłoby około 40 km, w praktyce zaś wynosi do 4 km, przyczem zauważyć trzeba, że ewaluacja najwyższa dla osiągnięcia najbliższej odległości nie wynosi jak w teorii  $45^\circ$  tylko około  $36^\circ$ . W praktyce dochodzi się do dat owych na podstawie eksperymentów.

W celu swobodniejszego opisywania ruchów wprowadzimy niektóre ogólniejsze uwagi co do sposobów rozkładania sił. Podobnie jak przyspieszenia lub prędkości możemy też i siły dość dowolnie rozkładać. Dotąd



rozkładaliśmy je w kierunku osi układu prostokątnego. Często jest wygodną rzeczą rozkładać siły na siły w kierunku stycznym do toru i normalnym. W symbolice wektorowej przystąpimy do tego rozkładu tak: ektor  $f$  wyrazić się

$$f = m \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d p}{dt},$$

gdzie  $p = v \cdot N$  oznacza prędkość  $v$  bezwzględnej wartości  $v$ , o kierunku  $N$ . Tak  $v$ , jakoteż wektor jednostkowy  $N$  jest zmienny z czasem. Stąd

$$f = m \frac{d}{dt} (v \cdot N) = m N \frac{dv}{dt} + m v \frac{dN}{dt}$$



Fig. 57.

Noboc  $\frac{dN}{dt} = \frac{dN}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$ , oraz  $\frac{ds}{dt} = v$ , mamy:

$$\frac{d^2 N}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$f = m N \frac{dv}{dt} + m v^2 \frac{dN}{ds}$$

Pierwszy składnik oznacza siłę składową w kierunku  $N$  tj. stycznym o wartości bezwzględnej  $\frac{dv}{dt}$ . Siła ta przyspiesza ruch. Dla oznaczenia wartości składnika drugiego wprowadzimy pojęcie promienia krzywizny  $R$ . Zauważymy trójkąt 120. jest on podobny do trójkąta utworzonego przez wektory, które jako takie możemy założyć w jednym i tym samym punkcie  $O$ ;  $v_1$  i  $v_2$  prędkości i trzeci wektor do przyspieszenia. Z podobieństwa tych trójk.



Fig. 58.

podobieństwa tych trójk.



Fig. 59.

kątów, podobnie jak to zrobiliśmy na str 41 przy rozważaniu rozkładu przyspieszeń w tych samych co tu kierunkach, wnioskujemy:

$$\frac{mv^2}{\left| \frac{ds}{d\theta} \right|} = \frac{mv^2}{R}$$

wzorem mamy wyrażoną bezwzględną wartość drugiego składowika. Kierunek tej drugiej siły składowej jest w kierunku promienia krzywizny w punkcie 1. a więc w kierunku normalnym do toru. Siła ta gra rolę siły tzw dośrodkowej lub odśrodkowej tej siły, która powoduje zakrzywienie toru.

Zauważyliśmy (str 36), że do opisu ruchu używać można współrzędnych biegunowych. Dogodnem jest to zwłaszcza wtedy, jeśli mamy do czynienia z siłami wychodzącymi z punktów, (z siłami więc których zależy od odległości od masy).



Fig 60.

Ruch rozpomocą współrzędnych biegunowych opiszemy podając równania:

$$r = f_r(t)$$

$$\varphi = f_\varphi(t)$$

Idąc tych równań można w jednej chwili przejść do układu prostokątnego przez wzory:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

Z tych zaś wzorów można przejść do wyrażenia siły przez połówne uśrednienie względem  $t$ .

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \cos \varphi - 2 \frac{dr}{dt} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - r \cos \varphi \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - r \sin \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \left| \begin{array}{l} m \cos \varphi \\ m \sin \varphi \end{array} \right.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \sin \varphi + 2 \frac{dr}{dt} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} - r \sin \varphi \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + r \cos \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \left| \begin{array}{l} m \sin \varphi \\ m \cos \varphi \end{array} \right.$$

Mając zatem wyrażenia przez masę  $m$  otrzymanych sił składowych w kierunkach  $x$  i  $y$ . Z tych zaś kładąc można rozłożyć w kierunku promienia wodzącego  $r$  i w kierunku normalnym do tego promienia. Składając teraz składowe poprzedniego wektora siły przypadające w jeden kierunek razem tj. sumując je prosto, dostaniemy wzory na:  
Siły składowe w kierunku promienia  $F_2$  i w kierunku normalnym do promienia  $F_1$ . Rachunkiem robi się to mnożąc wyrażenia przez liczby ośki wpisane i dodając je odpowiednio do siebie. Zatem:

$$F_2 = X \cos \varphi + Y \sin \varphi$$

$$F_1 = -X \sin \varphi + Y \cos \varphi \quad \text{czyli}$$

$$F_2 = m \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]$$

$$F_1 = m \left[ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right]$$



Drugie z tych wyrażeń z uwagi, że  $\frac{d}{dt}(r^2 \frac{d\varphi}{dt}) = 2r \frac{d\varphi}{dt} + r^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  można napisać prościej, i stąd mamy dwa wzory:

$$F_r = m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right].$$

$$F_\varphi = \frac{m}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right).$$

Siłę Newtonowską w kierunku dośrodkowym  $x$  wyrażamy  $m \frac{d^2 r}{dt^2}$ ; gdy zwrócimy uwagę na pierwszy wzór nasz, widzimy, że dostalibyśmy wyrażenie takie same, gdybyśmy opuścili drugi składnik. Ciemu jednak ten składnik drugi wchodzi w to wyrażenie? Przyczynę Newtona kierunek  $x$  jest stały; tutaj zaś zmienia się kierunek  $x$  zależnie od czasu, i to właśnie jest uwzględnione przez składnik drugi. Gdybyśmy mianowicie założyli, że  $x$  jest stałe, a zmienia się tylko  $\varphi$ , to ruch odbywałby się po kole. Ruch ten byłby jak wremy, jednostajny. Przyspieszenie bowiem byłoby tylko ku środkowi, i istniałaby tylko jedna siła (centralna) dośrodkowa wyznaczona na podstawie wzoru str. 76.

$\frac{mv^2}{r} = \frac{m r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2}{r}$ , a więc właśnie to, co oznacza nasz drugi składnik. Interpretacja drugiego wzoru byłaby na razie może nie dość jasna. Spotkamy się jednak z nim raz w następnem rozdziale i tam sobie to wyjaśnimy.

### 3. Ruch planet dookoła Słońca. Kepler postawił trzy

stawione prawa o ruchu planet około słońca : I. Planety krążą po elipsach dookoła słońca, które znajduje się w jednym z ognisk elipsy. II. Promienie wodzące zakreślające, w równych czasach równe pola, co też inaczej wypowiadaemy : prędkość wycinkowa planety jest stała. III. Kwadraty czasów obiegu porostają w stosunku do kwadratów średnich odległości planet od słońca. Nam nie będzie mi widzieć naturalnie elipsy zakreślanych przez planety tylko ruchy względne (względem ziemi). Korzystając z tych ruchów i starając się je dowiedzieć, opisać zapomocą cykloidy i epicykloidy. Dopiero Kopernik rozłożył owe ruchy na ruch ziemi i na ruchy własne planet po kole względnie elipsie. My przyjmujemy prawo Keplera stwierdzone empirycznie (Tycho de Brahe) za punkt wyjścia i postaramy się wyciągnąć stąd wnioski. Zwracając się do prawa II. Keplera i ubierając

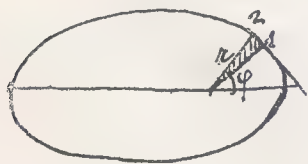


Fig. 61.

go w formułę matematyczną, powiemy: promień wodzący zakreśla w bardzo krótkim czasie trójkąt o podstawie  $rd\varphi$ , a wysokości  $z$ . Powierzchnia tego trójkąta

$dS = \frac{r^2 d\varphi}{2}$ . Dzielimy obie strony tej równości przez  $dt$  dostajemy to, co nazywamy prędkością wycinkową. Według II pra-

wa zaś: Prędkość wycinkowa:

$$\omega = \frac{ds}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\varphi}{dt} = \text{Const.}$$

Stąd  $\frac{d}{dt}(r^2 \frac{d\varphi}{dt}) = 0$ , a stąd, przypominając sobie wyrażenie na siłę normalną mamy:

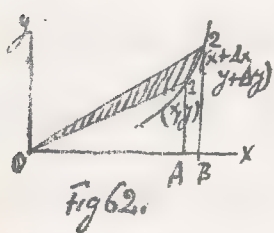
$$F_{\perp} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(r^2 \frac{d\varphi}{dt}) = 0.$$

Wnosząc stąd, że reszta wypadkowej czynnicy przy ruchu planet, którą myślimy sobie rozłożoną na składowe: normalną i w kierunku promienia wodzącego:  $F_r$  czyli centralną [którą jednak należy starannie odróżnić od składowej w kierunku promienia krzywizny], zostaje czynną tylko ta ostatnia. Powoduje ona, jak wiemy, zakrzywienie toru.

Ogólnie powiemy: charakterystyczną cechą sił centralnych jest: to, że  $F_{\perp} = 0$ . Gdy bowiem założymy ruch centralny, to dostajemy także konsekwencję, a gdy na odwrót założymy  $F_{\perp} = 0$ , to dostaniemy cechę ruchu centralnego: prędkość wycinkowa  $\omega = \text{Const.}$

Gdyby natomiast  $F_{\perp} \neq 0$ , to ruch już nie byłby centralny.

Do wniosków tych przy użyciu współrzędnych prostokątnych dojdziemy tak:



Jeżeli punkt porusza się z pozycji 1 do 2, promień narysował trójkąt: 0 1 2. Pole tego trójkąta (cieniowane na rycinie) jest:

$$O12 = OB2 - OA1 - AB21 = \frac{(x+\Delta x)(y+\Delta y)}{2} - \frac{xy}{2} - \frac{(2y+\Delta y)\Delta x}{2} =$$



$= \frac{x \Delta y - y \Delta x}{2}$ . Dzielać tę powierzchnię trójkąta przez czas  $\Delta t$  i przechodząc do granicy, dostajemy prędkość wycinkową:

$$w = \frac{1}{2} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$$

która według Keplera jest stała. Z tego wzoru można wrócić w jednej chwili do wzoru poprzed wyrowadzonego przy pomocy współrzędnych biegunowych na prędkość wycinkową, zakładając  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Zostaje jednak przy wzorze ostatnim, dostajemy:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} - x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{dx}{dt} = 0, \text{ skąd}$$

$$\frac{\frac{d^2 y}{dt^2}}{\frac{d^2 x}{dt^2}} = \frac{y}{x}$$

i na mocy Newtonowskiego określenia siły, mamy też:

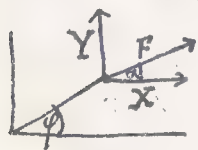


Fig 63.

$$\frac{Y}{X} = \frac{y}{x} = \lg \alpha$$

co podaje nam kierunek siły wypadkowej.

Jeśli przez  $\varphi$  nazwemy kąt, jaki zamyka promień wodzący z osią  $x$ ów, to kątolorozowy kierunek promienia wodzącego nazwamy:  $\frac{y}{x} = \lg \varphi$ . Stąd wnioskujemy, że  $\lg \alpha = \lg \varphi$ , czyli  $\alpha = \varphi + 2\pi$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )  
Znaczący się to, że siła wypadkowa naszego ruchu ma kierunek promienia wodzącego, mamy zatem do czynienia z siłą centralną. Można by odwrócić tę dowiedź

to coś my już wyżej dowiedzieli, że gdy siła jest centralna to prędkość wycinkowa  $\omega = \text{const.}$

Teraz wyciągniemy wnioski z przyjęcia I-go prawa Keplera. Równanie elipsy w współrzędnych biegunowych przedstawia się:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

gdzie parametr  $p = \frac{b^2}{a}$ , mimośród numeryczny  $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ .

Gdybyśmy się chcieli np. przekonać, że równanie to przedstawia elipsę, którą w współrzędnych prostokątnych przedstawiamy  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dość użyć transformacji  $x = e + r \cos \varphi$ ,

$y = r \sin \varphi$ . Po wstawieniu tych wzorów w znane równanie elipsy przekonalibyśmy się, że się spełnia tożsamość.

Chcemy wyciągnąć wnioski co do siły  $F_r = m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]$ .

Z II-go prawa wiemy, że  $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C$ , skąd  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}$ . Z I-go prawa mamy:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\varepsilon p \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} = \frac{p \varepsilon \sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} \cdot \frac{C}{r^2} = \frac{\varepsilon \sin \varphi C}{p}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\varepsilon \cos \varphi \cdot C}{p} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon C^2 \cos \varphi}{p r^2}$$

Teraz możemy wyrokować już siłę centralną:

$$F_r = m \left[ \frac{\varepsilon C^2 \cos \varphi}{p r^2} - r \left( \frac{C}{r^2} \right)^2 \right] = m \frac{C^2}{r^2} \left[ \frac{\varepsilon \cos \varphi}{p} - \frac{1}{r} \right]$$

czyli wobec  $\frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{p} = \frac{1}{r}$ ,

$$F_r = \frac{m C^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Czynnik  $\frac{m \cdot c^2}{p}$  jest wielkością stałą. Mamy więc prawo że siła centralna  $F_r$  jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości przy ruchu centralnym. Jest to wniosek Newtona. Siła  $F_r$  jest siłą grawitacyjną.

Wyciągniemy jeszcze wnioski z III prawa Keplera. Porównajmy ruchy różnych planet ze sobą i doświadczyć

$$\frac{T^2}{a^3} = k \quad (\text{stała})$$

bo według niego  $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \dots = k$ , gdzie  $T$  oznacza czas obiegu, a  $a$  połowę osi wielkiej elipsy. Wobec tego, że całe pole elipsy równa się  $ab\pi$ , promień zaś wyinknowy jest stałą  $= \frac{c}{2}$

$$T = \frac{ab\pi}{\frac{c}{2}} = \frac{2ab\pi}{c}$$

Stąd:

$$k = \frac{4a^2 b^2 \pi^2}{c^2 a^3} = \frac{4\pi^2}{c^2} p, \quad \text{stąd} \quad \frac{c^2}{p} = \frac{4\pi^2}{k}$$

Na siłę centralną dostaniemy zatem wzór:

$$F_r = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2}$$

Widzimy więc, że siła grawitacyjna jest wprost proporcjonalna do masy, a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości. Prawo to jest ogólnie ważne dla wszystkich planet.  $\frac{4\pi^2}{k}$  jest współczynnikiem stałym.

Zauważymy, że żadne z praw Keplera nie jest spełnione dokładnie, najmniej zaś dokładnie III prawo. Zachodzą



roznie perturbacyj, ruch nie odbywa się ściśle około słońca, tylko około środka masy całego układu naszego planetarnego. Pochodzi to stąd, że masy pozostałych planet wchodzi w grę. Jowisz np. mający  $\frac{1}{1000}$  części masy słońca wpływa już na położenie środka masy.

Prawa podane przez Keplera wytłumaczył Newton <sup>mo</sup>pojęciem siły grawitacyjnej. Trzeba zauważyć, że dzisiaj unika się od czasów Kirchhoffa słowa tłumaczenie. Kirchhoff powiedziałby, że Newton opisał ruchy planet, a nie wytłumaczył. Za Kirchhoffem powstał inni eliminując pojęcie przyczyny i skutku. Mach powiada, że pojęcia te są antropomorficzne. Gdy mówimy o sile grawitacyjnej, grawitacji, to mamy na myśli tylko to, że stwierdzamy regularność zjawiska, że więc zjawisko regularnie odbywające się opisujemy. Można się na to zgodzić, jeśli się słowo opisywać bierze w tak obszernym zakresie..

Podobnie jak w powyższych przykładach postąpiłibyśmy gdybyśmy mieli opisać ruch drgający. W dotychczasowych rozważaniach uwarunkowany punkt jako swobodny. Na niego działają różne siły i pod ich wpływem punkt wyko-

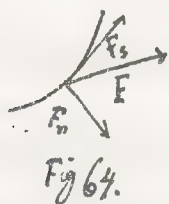
nywać pewne ruchy. Teraz przystąpimy do mechaniki punktu nieswobodnego.

## B. Dynamika punktu nieswobodnego.

W praktyce jest zwykle swoboda ruchu punktu materialnego ograniczona, to znaczy się, że punkt musi zostawać w czasie ruchu albo na jakiejś powierzchni albo na jakiejś krzywej. Wp. przy wahadle matematycznym: w stożkowem (Punkt m. umocowany na nitce, utwierdzonej drugim końcem w pewnym punkcie statycznym i spełniającej wszystkie warunki promienia kuli) są dwie swobody ruchu; punkt może się poruszać po powierzchni kuli. W wadła bifilarnego (= punkt umocowany na dwu takich nitkach utwierdzonych drugim końcem w dwu różnych statycznych punktach) jest tylko jedna swoboda ruchu; punkt może się poruszać po obwodzie koła. Prócz ograniczeń ruchu do powierzchni i krzywej mogą być inne np. przesunięcia jednokierunkowe: tak np. ciało rucho-  
ne na stole nie może dokonywać przesunięć ujemnych, bo przeska-  
czyłoby tenno powierzchnia stołu. W te ostatnie jednak ogranicze-  
nia na razie nie wchodzić i zajmujemy się tylko poprzednie-  
mi. Różnicę kardynalową punktu ogranicza się w tych

razach, albo do powierzchni danej równaniem  $F(xyz)=0$ , albo do krzywej danej przez punkty wspólne dwu równań powierzchni  $\Phi(xyz)=0$  i  $\Psi(xyz)=0$ .

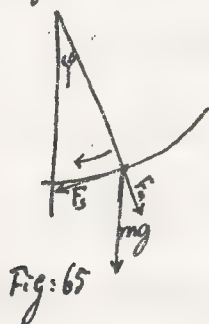
Przy opisywaniu ruchów podlegających pewnym ograniczeniom swobody możemy nieraz użyć przewidywać sposób postępowania. Gdy np. punkt ma się poruszać po krzywej, to wobec



tego, że siłę  $F$  możemy rozłożyć na składową styczną  $F_s$  i składową normalną  $F_n$ , przyczem ta ostatnia nam nie obchodzi, bo ruch się może odbywać po krzywej, będziemy mieli ruch określony przez podanie siły stycznej. Siłę styczną określiliśmy wyżej równaniem:

$$F_s = m \frac{dv}{dt}$$

Mając określone  $F_s$  dla każdego punktu krzywej, dostajemy równanie różniczkowe, z którego już wypływać będzie ruch. Metoda ta daje się np. zastosować przy wahadle, gdy ruch ma się odbywać w płaszczyźnie. Uważajmy wahadło wychylone o kąt  $\varphi$ .



Na punkt drąta siła  $mg$ , którą rozłożymy na siłę normalną  $F_n$ , która nam nie obchodzi i siłę styczną:  $F_s = -mg \sin \varphi$ .

Nobee wzoru na siłę styczną, mamy równanie

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \varphi.$$

Różniczkowe.



Jeśli  $s$  oznacza tuk i jeśli tuk ten bierzemy od pierwszej pozycji wychylenia i prędkość rachujemy w kierunku strzałki, to wobec tego, że kątem  $\varphi$  maleje, dajemy znak  $-$ . Wzemy zatem:

$$v = \frac{ds}{dt} = -a \frac{d\varphi}{dt}$$

gdzie  $a$  oznacza długość nitki. Stąd

$$a \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g \sin\varphi.$$

Dostaliśmy tak równanie mechaniczne określające ruch wahadła. Chodzi o całkowanie. Ta sprawa nieco trudniejsza, bo całka tego równania jest eliptyczną i nie da się w skończonej formie wyrachować. Tylko musimy się uciekać do rozwinięć w szereg nieskończone. Na razie jednak uprościmy sprawę w ten sposób, że się ograniczymy do wychyleń bardzo małych, takich, że  $\sin\varphi$  będziemy mogli zastąpić przez  $\varphi$ . Dostaniemy:

$$a \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\varphi$$

Teraz jest to już znany nam typ równań różniczkowych. Wiemy że ruch będzie harmoniczny przystający, całki będą:

$$\varphi = A \sin(\alpha t + \varepsilon)$$

Łatwo się o tem przez podwójne upochadniczenie przekonać:

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\alpha \cos(\alpha t + \varepsilon)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -A\alpha^2 \sin(\alpha t + \varepsilon)$$

Widzimy, że równanie różniczkowe się spełnia dla  $\alpha = \sqrt{\frac{g}{2}}$

Zatem: 
$$\varphi = A \sin(t \sqrt{\frac{g}{2}} + \varepsilon)$$

Periód wynosi  $T\sqrt{\frac{g}{2}} = 2\pi$ , zatem okres ruchu:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{g}}$$

Do określenia  $\varepsilon$  potrzebne dwie stałe całkowania  $A$  i  $\varepsilon$ . W tym celu weźmy dla  $t = t_0 = 0$ , będzie  $\varphi = \varphi_0$   $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = 0$ . Będzie:

$$\varphi_0 = A \sin \varepsilon$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = A \sqrt{\frac{g}{2}} \cos \varepsilon = 0$$

To ostatnie równanie mogłoby zachodzić albo dla  $A=0$ , albo dla  $\cos \varepsilon = 0$ , albo dla obu tych wypadków równoczesnych. Atoli  $A \neq 0$  z powodu  $\varphi_0 \neq 0$ . Zatem równanie ostatnie określa nam  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$ . Stąd dostajemy zaraz na określenie  $A$  z pierwszego równania:  $A = \varphi_0$  amplituda. Wprowadzając to w równanie ruchu, mamy:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(t \sqrt{\frac{g}{2}}).$$

Tak więc mamy już ruch przy powyższych założeniach w zupełności określony. Metoda atoli jakiegось tu więcej nie da się ogólnie stosować. W metodzie tej rozkładaliśmy siłę na styczną i normalną, przytem ta ostatnia nie nas nie obchodziła, a ruch cały był określony przy pomocy siły stycznej. Co jednak będzie, gdy ruch może się odbywać np. po powierzchni?

Jak mamy wtedy siłę rozkładać? Metoda poprzednia nie daje nam tu skarówek. Pomysłowy bowiem sobie, żeśmy i w tym razie rozłożyli siłę na normalną (na którą więc nie uważamy) i na dwie styczne do danej powierzchni. Nasze poprzednie równanie:  $m \frac{dv}{dt} = F_s$  odnosi się do siły stycznej w kierunku chwilowego ruchu. Teraz jednak na powierzchni możemy w każdej chwili wykreślić nieskończenie wiele krzywych o różnych kierunkach. Wszystkie te kierunki są równie możliwe. Nie wiemy więc jaki z nich będzie kierunkiem drogi i jak mamy siłę rozkładać. Do rozwiązywania takich zadań służy ogólna:

### Zasada D'Alemberta.

Różne są sposoby wyprowadzenia tej zasady. Jeden z prostszych jest np. taki: Punkt umieszczony porusza się po pewnej powierzchni lub krzywej możemy uważać na swobodny, gdybyśmy do siły zewnętrznej  $F$  działającej na punkt dodali jeszcze siłę  $\Phi$ , która wywiera na powierzchnię lub krzywą po której się punkt



jest umieszczony poruszać. Siła  $\Phi$  nie jest naturalnie równoważeniem tarcia; powierzchnie i krzywe przyjmujemy jako idealnie gładkie; Gdyby jakie tarcie należało uwzględnić, to wtórnym



je do siły  $F$ . Wobec tego możemy dla tego punktu nakładać równania Newtonowskie. Rozkładając tedy siłę  $F$  na trzy składowe  $X, Y, Z$ , analogicznie zaś siłę  $\Phi$  na  $\xi, \eta, \zeta$ , mamy:

$$\begin{array}{l|l} m \frac{d^2x}{dt^2} = X + \xi & \delta x \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \eta & \delta y \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + \zeta & \delta z \end{array}$$

Powiedzmy teraz, że punkt się przesunął o mały kurek  $ds$  po swej powierzchni, którego składowe narnacemy  $\delta x, \delta y, \delta z$ .

Mnożąc powyższe równania przez odpowiednie przesunięcia składowe, dodając je do siebie i porządkując, dostajemy wyrażenie:

$$(X - m \frac{d^2x}{dt^2}) \delta x + (Y - m \frac{d^2y}{dt^2}) \delta y + (Z - m \frac{d^2z}{dt^2}) \delta z = -[\xi \delta x + \eta \delta y + \zeta \delta z]$$

Lewa strona tego wyrażenia przedstawia nam pracę wykonaną przez siłę przymusową  $\Phi$  przy przesunięciu punktu o element łuku  $ds$ . W nawiasie bowiem mamy iloczyn ze sił składowych i elementów drogi. Jeśli przesunięcie owe  $ds$

będzie zgodne z warunkiem ruchu tj. po powierzchni lub krzywej zostanie uskutecznione, czyli jak to krótko mówimy jeśli przesunięcia owe będą przygotowane \*), to wobec matości łuku  $ds$  będzie ono prostopadłe do siły  $\Phi$ . Stenoras

\*) Niemcy nazywają takie przesunięcia Virtuelle Verschiebungen lub virtuelle Geschwindigkeiten, Francuzi: virtuelles vitesses.

praca jest równa zero i tedy wyrażenie w nawiasie równa się zero. Stąd dostajemy wyrażenie, do któregośmy się doszli:

$$(X - m \frac{d^2x}{dt^2}) \delta x + (Y - m \frac{d^2y}{dt^2}) \delta y + (Z - m \frac{d^2z}{dt^2}) \delta z = 0$$

gdyż, akcentujemy to,  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  są dobrane zgodnie z warunkami ruchu tj. uwzględnione jest w nich równanie powierzchni lub krzywej, po której się ruch odbywa.

Historyczny wywód tej zasady opiera się na pojęciu równowagi: Dany punkt, na którym działają siły zostanie w równowadze, jeśli siła wypadkowa  $f=0$ , lub jeśli praca wykonana przy przesunięciu w jakimś kierunku jest równa zero:

$$(f \cdot dr) = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0$$

Warunek ten równowagi wypowiedziany dla punktu swobodnego redukuje się dla punktu X murowanego porożawać na pewnej powierzchni lub krzywej, do tego, że praca wykonana w kierunku stycznym do tej powierzchni lub krzywej czyli praca dla przemieszczenia przygotowanego ma być równa zero. To co dotąd powiedzieliśmy tu jest ważne dla stanu równowagi. Ze stanu równowagi do ruchu przejść można łatwo zapomnąc zasady D'Alemberta. Spiewającej: siły, które się nie równoważą, tylko powodują ruch, równo-

ważyłoby się, gdybyśmy od sił zewnętrznych odjęli siły im równoważne tj iloczyn  $e$  masy i przyspieszenia. Zasada ta okazuje się, bo nie wyraża ona nic innego jak równania Newtonowskie siły napisane w formie:

$$X - m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$Y - m \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$Z - m \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

Jeśli przesunięcia przygotowane jest  $\delta s$ , którego składowe  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , to oczywiście zachodzi równość:

$$(X - m \frac{d^2x}{dt^2}) \delta x + (Y - m \frac{d^2y}{dt^2}) \delta y + (Z - m \frac{d^2z}{dt^2}) \delta z = 0$$

do którejśmy doszli.

W symbolice wektorowej moglibyśmy zasadę tę ująć tak. Punkt umieszczony do porównania na pewnej powierzchni lub krzywej, na której działają siły  $f$  moglibyśmy uwzględnić swobodny, gdybyśmy do siły  $f$  dodali pewną siłę  $f'$  wywołaną przez powierzchnię lub krzywą. Można wtedy otrzymać równania Newtona i napisać

$$f + f' = m \frac{d^2r}{dt^2} \quad \text{czyli}$$

$$f - m \frac{d^2r}{dt^2} = -f'$$

$f'$  jest siłą przymusową. Nacę wyrażamy iloczynem skalarnym siły i przesunięcia. Bezpośrednio więc:



$$(f - m \frac{d^2 r}{dt^2}) dr = - f' dr$$

Przesunięcia, jakie tu są możliwe, są styczne do danej powierzchni tej krzywej;  $f'$  zaś może mieć kierunek tylko normalny. Powierzchnię bowiem suponujemy jako idealnie gładką. Stąd

$$f' \perp dr$$

Zatem  $f' dr = 0$ , i stąd

$$(f - m \frac{d^2 r}{dt^2}) dr = 0$$

rownanie ważne dla specjalnych przesunięć  $dr$ , a mianowicie dla przesunięć przygotowanych. Rozpisując to równanie dostajemy zasadę ruchu D'Alemberta w formie zwykłej:

$$(X - m \frac{d^2 x}{dt^2}) \delta x + (Y - m \frac{d^2 y}{dt^2}) \delta y + (Z - m \frac{d^2 z}{dt^2}) \delta z = 0$$

Z tego można dostać w jednej chwili specjalny wypadek równania dla równowagi, zakładając:  $\frac{dx}{dt^2} = \frac{dy}{dt^2} = \frac{dz}{dt^2} = 0$

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0$$

Jest to zasada prac przygotowanych, orzekająca, że równowaga jest wtedy, jeśli praca przygotowana jest zerowa. Przez pracę zaś przygotowaną rozumiemy pracę wykonaną przy przesunięciu przygotowanym. (Principe des vitesses virtuelles, Principe des vitesses virtuelles).

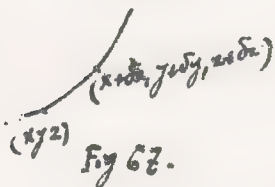
Zastosowanie: Użyteczność zasady D'Alemberta polega na tem, że mając dane a priori siły zewnętrzne  $X, Y, Z$ , oraz równanie powierzchni lub linii krzywej, po której się punkt jest zmuszony poruszać, możemy dojść do równań ruchu czysto matematycznemi operacyami.

Wrazie, gdy punkt ma zostawać na powierzchni:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

natenczas owe:  $\delta x, \delta y, \delta z$ , mając dawać wyrost przesunięciu przygotowanemu muszą wynikać z równania tej powierzchni. Gdy się punkt z pozycji  $(x, y, z)$  przesunie do

$(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ , zostając na powierzchni to zachodzi:



$$\varphi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0$$

Rozwijając ostatnie wyrażenie według Taylora, i uprościwszy, co pod warunkiem ciągłości funkcji możemy uczynić, na pierwszym wyrazie rozwinięcia, dostajemy:

$$\varphi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - \varphi(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z = 0$$

Z tego równania i równania D'Alemberta można teraz wyrugować np.  $\delta x$ , zostawiając dowolne  $\delta y, \delta z$ , ale często się używa metody Lagrange'a czynnika

Moiemy, mianowicie pomnożyć równanie poprzednie:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z = 0$$

przez czynnik dowolny  $\lambda$  i dodać je następnie do równania D'Alemberta. Dostaniemy:

$$(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \delta x + (Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}) \delta y + (Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}) \delta z = 0$$

Czynnik dowolny  $\lambda$  możemy teraz tak dobrać, by np. ostatni wyraz stał się równy zero. Zostaną wtedy dwa inne wyrazy, pomnożone przez całkiem dowolne:  $\delta x$ ,  $\delta y$ . Jeśli więc wyrażenie z tych dwa wyrazów ma być przyrównane do zera, to warunkiem tego jest, by same nawiasy były równe zero. Dostajemy tak trzy równania różniczkowe ruchu:

$$X - m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

$$Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Wchodzi w nie czynnik (już teraz nie dowolny, bo poprzednim warunkiem określony)  $\lambda$  na razie nie znamy. Kwestya operacyi matematycznej jest pozbycie się tego czynnika, reszta moimna go a posteriori obliczyć.

Ważne gdy punkt materialny jest skazany na zostawanie na pewnej linii określonej:

Mechanika Ark. VIII.



$$\varphi(xyz) = 0 \quad \psi(xyz) = 0$$

notenczas musiałby być analogicznie do poprzedniego do następującego wyrażenia:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta z = 0$$

Je pomnożone przez dowolne czynniki  $\lambda$  i  $\mu$  i dodane do równania D'Alemberta dają:

$$(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x}) \delta x + (Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y}) \delta y + (Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z}) \delta z = 0$$

Jeśli w tem wyrażeniu dobraćemy  $\lambda$  i  $\mu$  tak, żeby dwa wyrazy stały się równe zero, niech to będą np. dwa ostatnie, to wtedy też pozostały, tu więc pierwszy wyraz, wobec dowolności przesunięcia składowego  $\delta x$  będzie też równy zero. Dostaniemy tak znowu trzy równania różniczkowe ruchu:

$$X - m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

$$Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

$$Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

z których znowu  $\lambda$  i  $\mu$  na razie nieznane można wyugować albo a posteriori obliczyć.

Damy proste przykłady na zastosowanie metody D'Alemberta.

1. Niech punkt ślizga się pod wpływem ciężkości po prostej pochyłej. Dla prostoty przyjmijmy, że prosta ta leży w płaszczyźnie rysunku. Siły działające są:

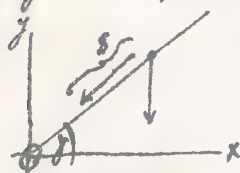


Fig 68.

$$X=0, Y=-mg.$$

Równanie prostej:  $y = x \operatorname{tg} p$ . Z nie uwzględniamy, bo ruch dwuwymiarowy.  $\delta y = \operatorname{tg} p \delta x$ .

$$(0 - m \frac{d^2 x}{dt^2} - \lambda \operatorname{tg} p) \delta x + (-mg - m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda) \delta y = 0$$

Stąd

$$-m \frac{d^2 x}{dt^2} - \lambda \operatorname{tg} p = 0$$

$$-mg - m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda = 0$$

równanie różniczkowe ruchu.  $\lambda$  można np. wyeliminować. Bez

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \operatorname{tg} p (g + \frac{d^2 y}{dt^2}) = 0$$

$x$  i  $y$  jest tu związane. Celem rozszerzenia powrotujemy się na równanie dane, skąd mamy:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \operatorname{tg} p \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

i zatem:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} [1 + \operatorname{tg}^2 p] + g \operatorname{tg} p = 0 \quad \text{Stąd}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{g \operatorname{tg} p}{1 + \operatorname{tg}^2 p} = -g \sin p \cos p$$

$$x = -g \sin p \cos p \frac{t^2}{2} + \alpha t + \beta$$

Dostaliśmy tak równanie ruchu, które jednak jest różne od wz.

przewodzonego na str. 42. Podchodzi to stąd, że tam kręglisny  $s$  w kierunku ruchu, tu zaś  $x$  jest reutem  $s$ . Można jednak w jednej chwili do tamtego kształtu wrócić, z uwagi, że

$$ds = -\frac{dx}{\cos y} \quad , \quad \beta = \alpha = 0$$

Dostajemy

$$s = g \sin y \frac{t^2}{2}$$

wsic noi ruch ciata poruszajacego sie po rowni pochytej.

2. Wahadło matematyczne. Zatożmy, że ruch wahadła od-



Ry. 69.

bywa sie w piaszyszcze. Nie trzeba bedzie wiec uwzglednic sily skiadowej  $Z$ . Bedzie wiec:

$$X = 0 \quad , \quad Y = -mg$$

Równanie kota, po którym się punkt porusza:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

Stąd :

$$0 = m \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \lambda x = 0$$

$$-mg - m \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \lambda y = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{array} \right.$$

Z równania kota mamy:

$$\lambda x \frac{dx}{dt} + \lambda y \frac{dy}{dt} = 0$$

Mnożąc więc poprzednie równania odpowiednio przez  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  i dodając osobno do my równania od  $\lambda$  :

$$-mg \frac{dy}{dt} - m \left( \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} \right) = 0$$

$$-g dy = d \frac{[(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2]}{2}$$

$$-gy = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] + Const$$



Nobec  $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = V^2$

$$-gy = \frac{1}{2} V^2 + \text{Const}$$

Kształt ten jeszcze jest nam niewygodny, wprowadzimy zatem odpowiednie biegunowe.

$$-y = a \cos \varphi, \quad V = -a \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{więc}$$

$$ga \cos \varphi = \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \text{Const}$$

Alby to równanie miało kształt taki sam jak na str 87 wy. Howerzy je względem  $t$  zróżniczkować:

$$a \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -g \sin \varphi$$

Dostaliśmy więc kształt taki sam, ale droga jest stonkska-  
wa dłużej. To jest wada metody Lagrange'a, ale zato jest ona  
ogólna i oszczędza nam myślenia. Myśląc dla jej sto-  
sowania a nać tylko ciły dratajes i kształt tworze-  
 geometrycznego, na którym ma się punkt poruszać.

Zauważymy, że równanie:

$$ga \cos \varphi = \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \text{Const}$$

wyraża po prostu zachowanie energii. Ale to można było prze-  
widzieć bezpośrednio, bo zakładaliśmy, że ruch się odby-  
wa pod wpływem siły ciężkości, a więc potencjalnej. Peka-  
cyat grawitacyjny jest  $U = mgy$ .

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -mg$$

a że suma z energii potencjalnej i kinetycznej dla sił konserwatywnych jest stała, więc:

$$mgy + \frac{m}{2} V^2 = \text{const},$$

a to jest to samo co wyżej. Z zasady zachowania energii wyprowadzamy więc ten ruch najprościej. Ogólnie jeśli na punkt materialny działają siły konserwatywne i gdy jest dana tylko jedna swoboda tj. ruch ma się odbywać po linii, to najprościej postępujemy opierając się na zachowaniu energii. W wypadkach zawi-tych rozładu to nie wystarczy, bo stąd dostajemy jedną tyl-ko relację, a gdy mamy ruch dwuwymiarowy trzeba re-kurrować do dwóch równań.

Jeszcze w trzeci sposób można wyprowadzić równanie ruchu dla wahadła matematycznego. Wobec tego, że punkt masy porusza się po kole:  $x^2 + y^2 = a^2$  jest

$$x\delta x + y\delta y = 0,$$

$$\delta y = -\delta x \cdot \frac{x}{y}$$

Uwzględniając to w rozkładzie ruchu d'Alemberta, mamy:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x - (-mg - m \frac{d^2 y}{dt^2}) \delta x \cdot \frac{x}{y} = 0$$

$$\left\{ \frac{d^2 x}{dt^2} + \left( g - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \frac{x}{y} \right\} \delta x = 0$$

To możliwe, gdy nawias = 0.

$$y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} + gx = 0$$

Rezultat ten jest taki sam jak gdybyśmy postępowali według Lagrange'a uwolniłi równania od symetrii  $\lambda$ . Przedtem postępujemy tą metodą Lagrange'a doszliśmy do zasady zachowania energii. Teraz przepisujemy równanie w formie.

$$\frac{d}{dt} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = gx$$

i przypominając sobie z ruchu centralnego, że nawias przedstawia podwójną prędkość wciętową:  $= a^2 \frac{d\varphi}{dt}$  (str. 79, 81)

napiszemy:

$$\frac{d}{dt} \left( a^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = gx$$

$$a^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = gx = -ga \sin \varphi$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{a} \sin \varphi$$

Znowu równanie różniczkowe ruchu wahadła. Choćby tylko o całkowanie tego równania. Gdy nam nie chodzi o wielką dokładność możemy sprawę uprościć, rozwijając  $\sin$  według Taylora:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

i poprostymy na pierwszy m składnik. Stąd:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{a} \varphi$$

Rozwiązanie:  $\varphi = A \sin(\omega t + \delta)$ . Stale  $A$  i  $\delta$  określmy z pozycji początkowej i prędkości. Dostaniemy, jak już to wiemy ze str. 88:  $\varphi = \varphi_0 \cos(t \sqrt{\frac{g}{a}})$ .

Do tego samego rezultatu można dojść innymi sposobami.



Możemy napisać:

$$\frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2\varphi}{dt^2} dt = -\frac{g}{L} \sin\varphi \cdot d\varphi$$

$$\frac{1}{2} d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{L} d(\cos\varphi)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{L} \cos\varphi + C$$

Stałą  $C$  można określić, gdy dana jest pozycja początkowa i prędkość tj. dla  $t=0$ ,  $\varphi=\varphi_0$ ,  $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0=0$

$$0 = -\frac{g}{L} \cos\varphi_0 + C \quad \text{stąd}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{L} (\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \int \sqrt{\frac{2g}{L}} dt$$

Gdy znowu ograniczymy się do małych wychyleń i przedstawimy:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \left[\frac{\varphi^4}{24} + \dots\right]$$

$$\cos\varphi_0 = 1 - \frac{\varphi_0^2}{2} + \left[\frac{\varphi_0^4}{24} + \dots\right]$$

dostaniemy:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}} dt = \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t + \text{Const}$$

lewa strona:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2}} = \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0}$$

$$\arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} = \sqrt{\frac{g}{L}} t + \text{Const}$$

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{L}} + \text{Const}\right),$$

gdzie znowu  $\text{Const}$  oznaczyć można z warunków początkowych.

Postaramy się teraz obliczyć ścisłej całkę równania:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{a} \sin \varphi.$$

Musimy w tym celu wrócić do równania, w którym jeszcze figuruje  $\cos$  *in extenso*:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} =$$

Wobec:  $1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$   
 $1 - \cos \varphi_0 = 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$  jest  $\cos \varphi - \cos \varphi_0 = 2(\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2})$

i stąd całka przyjmie kształt:

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}}$$

Kładąc:  $\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} = z = \sin \psi$ , skąd

$$\frac{\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} d\varphi = dz = \cos \psi d\psi \quad \text{oraz}$$

$$d\varphi = \frac{dz \cdot 2 \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} dz}{\sqrt{1 - (z \sin \frac{\varphi_0}{2})^2}}.$$

Stąd zaś całka powyższa

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} dz}{\sqrt{1 - (z \sin \frac{\varphi_0}{2})^2} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}} \quad \text{i wreszcie}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{a}} t + \text{const}$$

gdzie całka po lewej stronie jest już doprowadzona do kształtu normalnego pierwszego rodzaju całek eliptycznych. Wzrost czasu

Ja się przedstawić taką całką; stała nadwrotność  $z$  jest funkcją eliptyczną argumentu  $\alpha \sin \psi$ . Postępujemy ciż transformacją drugą, mamy:  $dz = \cos \psi d\psi$ ,  $\sqrt{1-z^2} = \cos \psi$  : Stąd dostajemy:

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \psi \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}} = \mp \sqrt{\frac{a}{g}} + \text{const}$$

Ponieważ  $|\sin \psi| \leq 1$ , więc jeśli  $|\sin \frac{\varphi_0}{2}| < 1$ , to możemy  $(1 - \sin^2 \psi \sin^2 \frac{\varphi_0}{2})^{-\frac{1}{2}}$  rozwinąć według Newtona na szereg zbieżny. Lewa strona przedstawi się tedy:

$$\int \left[ 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \psi \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{3}{8} \sin^4 \psi \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right] d\psi$$

Całkę tę można już teraz łatwo obliczyć z jaką się chce dokładnością. My w to nie wchodzimy, a wolniemy po uwagę wypadek szczególny, mianowicie postaramy się wyznaczyć okres  $T$ . Jeśli  $\varphi = \varphi_0$  oznacza największe wychylenie,  $\varphi = 0$  oznacza pozycję równowagi, to odpowiednie wartości na  $\psi$  są:  $\psi = \frac{\pi}{2}$  oraz  $\psi = 0$ . Stąd

$$T = 4 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}} [1 + \dots] d\psi$$

$$= 4 \sqrt{\frac{a}{g}} \left[ \psi + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \int \sin^2 \psi d\psi + \dots \right]_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4 \sqrt{\frac{a}{g}} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right] \quad \text{cykli}$$



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{a}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \dots \right].$$

Jest to dokładny wzór na okres wahanja wahadła matematycznego. O ile aż ograniczymy do wychyleń małych, natenczas błąd powstały przez opuszczenie składników szeregu poprawczy od drugiego będzie miernoczny tak, iż będzie zachodził wzór na okres wahanja już poprzedz wyproawdzony:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{a}}$$

Ciekawem jest to, iż według tego wzoru okres nie zależy od amplitudy:  $\varphi_0$ . Nie zależy on też od masy punktu materialnego. Jest natomiast proporcjonalny wprost do pierwiastka przyspieszenia ziemskiego odwrotnie do pierwiastka długości nitki. O ile zatem przyspieszenie ziemskie i długość nitki wahadła zostaje niezmieniona, to okres wahanja jest stały. Jest to tw. o izochronizmie wahadła o małych wychyleniach. Poprawkę co do izochronizmu czynnym wyraz drugi szeregu. Np dla  $\varphi_0 = 5^\circ$ ;  $\sin \frac{\varphi_0}{2} = 0.0436...$  Stąd poprawka wynosić będzie:  $0.0004...$  W praktyce jest ona zatem dla takich amplitud znikomo mała.

Z obserwacji  $T$  przy znanem  $a$  i  $\varphi_0$  można oznaczyć przyspieszenie ziemskie dla danego miejsca \*). Zauważymy jeszcze, iż w rownaniach naszych nie uwzględnialiśmy żadnego

\*) Według niego wynosi ono około  $981 \frac{cm}{sek^2}$ .

tarcia; wychodziliśmy bowiem z definicji wahadła matematycznego.

3. Wahadło stożkowe. W wahadle matematycznym punkt porusza się po łuku koła, w stożkowym nasgiód po czaszy kulistej. Stąd dla ujęcia w równania ruchu wahadła stożkowego metodą Lagrange'a potrzebna jest znajomość równania kuli i sił składowych  $X, Y, Z$ . Przyjmując, że środek kuli znajduje się w początku naszego układu, mamy jej równanie:

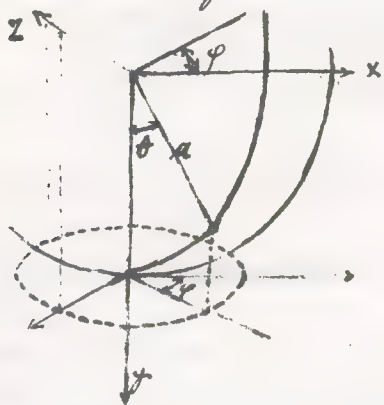


Fig. 70.

jej równanie:

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

i system równań:

$$X - m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$Y - m \frac{d^2y}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

$$Z - m \frac{d^2z}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Nobee:  $X=0$ ,  $Z=0$ ,  $Y=+mg$  system ów przejdzie na:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 2\lambda x$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = +mg + 2\lambda y$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = 2\lambda z$$

Zakładając w celu uproszczenia  $\frac{2\lambda}{m} = \mu$  dostaniemy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = +g + \mu y$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \mu z$$

z	$\frac{dz}{dt}$
	$\frac{dy}{dt}$
x	$\frac{dx}{dt}$

Pomnożymy odpowiednio jedno równanie przez  $z$  drugie przez  $x$  i odejmiemy. Dostaniemy:

$$z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad \text{czyli}$$

$$\frac{d}{dt} \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = 0 \quad \text{Skąd}$$

$$(a) \quad z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = \text{const.}$$

Przy ruchu więc tym „prędkość” wycinkowa na płaszczyźnie  $xz$  jest stała. Znaczy się to, jeśli na płaszczyźnie  $xz$  utworzymy ruch punktu wahadła stojkowego, to ruch nitki zakreślać będzie w równych czasach równe pola.

Pomnożymy teraz równanie systemu odpowiednio przez  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  i dodajemy je do siebie.

$$\frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{dz}{dt} = \mu \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right) - g \frac{dy}{dt}$$

Ponieważ punkt ma zostawać na powierzchni kuli, stąd wyrażenie w nawiasach w prawej stronie musi być równe zero i wyrażenie się uprości. Łatwiej je dostaniemy:

$$(b) \quad \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = +gy + \text{const}$$

Widzimy, że jest to stwierdzenie zachowania energii:

$$\frac{1}{2} m V^2 - mgy = \text{const.}^*)$$

co można było zresztą z góry przewidywać. Mamy więc 2 równania:

\*) Znak — pochodzi stąd, że bierzemy dodatnią oś  $y$  ruko na dół.



(a) i (b), z których już wyrugowanej jest caymnik mierzony  $\mu$ , oraz trzecią równanie kuli. Dla łatwiejszego opisu ruchu mogliśmy wprowadzić układ biegunowy przestrzenny. Wprowadzamy więc dwa kąty  $\varphi$ , odpowiadający długości geograficznej, i  $\theta$ , będący dopełnieniem szerokości geograficznej. Po międzydowneni trzema współrzędnymi  $x, y, z$ , a wprowadzonymi zachodzić będą następujące relacje:

$$x = a \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = a \cos \theta$$

$$z = a \sin \theta \sin \varphi$$

gdzie  $\varphi$  i  $\theta$  są zmiennymi. Zmniejszają się więc ilość zmiennych z trzech na dwie. Wychodzi to stąd, że trzecią współrzędną układu biegunowego: promień jest tu w myśl warunków zadania wielkością stałą  $= a$ . Dostaniemy zatem dwa równania różniczkowe, w których  $\theta$  i  $\varphi$  będziemy uważać jako funkcje  $t$ . Można to osiągnąć przez substitucję powyższą lub bezpośrednio ze znalezienia współrzędnych nowych. Opuścimy to jednak, bo dostalibyśmy znowu funkcje eliptyczne. Wzmiemy tu tylko pod uwagę wypadek specjalny. Założymy mianowicie, że  $y = y_0 = \text{const}$  tj. punkt obciążający nitkę będzie poruszała się

przecięciu się płaszczyzny równoległej do płaszczyzny ( $xy$ ) i powierzchni kuli czyli na pewnym kole. Czy to jest możliwe? Wartość  $g$  wchodzi tylko w drugie równanie naszego systemu równań. Jeśli  $g$  ma spełnić powyższe warunki, to musi

$$+g + \mu g_0 = 0$$

skąd  $\mu = -\frac{g}{g_0}$  i system nasz redukuje się do dwa równań:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{g_0} x$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{g}{g_0} z$$

od siebie niezależnych. Jeśli więc  $g_0$  będzie spełniało powyższą zależność, to specjalny ów ruch będzie mógł odbywać.  $\frac{g}{g_0} = \alpha$  jest wielkością stałą. Mamy więc znany nam już typ równań różniczkowych:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha x$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\alpha z$$

Rozwiązanie ich są:

$$x = A \sin(t\sqrt{\alpha} + \varepsilon)$$

$$z = B \sin(t\sqrt{\alpha} + \varepsilon'),$$

przez co wobec tego, że ruch odbywa się po kole:  $A = B$ , bo uchylenia około osi  $yz$  są równe.  $\varepsilon$  i  $\varepsilon'$  określają początkowe położenia punktu materialnego wahadła. Okres wahań zależy

od  $\alpha = \frac{g}{g_0}$ . Jest mianowicie:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{g_0}{g}}$$

Wzór więc taki sam jak przy wahadle matematycznym, tylko na miejsce długości wahadła  $a$  przychodzi rzut nitki na oś  $yz$ :  $g_0$ . Wzór ten przewidzieć można rozważaniem fizycznym. Ruch punktu materialnego wahadła stożkowego odbywa się



pod współdziałaniem dwóch sił: ciężkości i odśrodkowej. Nitka przybiera kierunek wypadkowej. Jeśli siłę odśrodkową nazwiemy  $\Omega$ , to

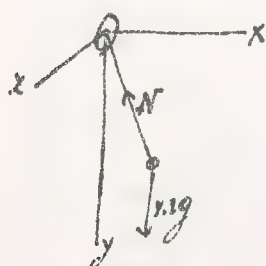
$$\Omega = \frac{mv^2}{r} = m \frac{\left(\frac{2\pi r \sin \theta}{T}\right)^2}{a \sin \theta} = \frac{4\pi^2 m a \sin \theta}{T^2}$$

$$\frac{\Omega}{mg} = \frac{4\pi^2 a \sin \theta}{g T^2} = \tan \theta ; \text{ stąd}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{a}{g} \cos \theta$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g} \cos \theta}$$

Również można bez odwoływania się do metody Lagrange'a dojść sposobem fizycznym do równań ruchu. Powiadać mianowicie:



Na punkt materialny wahadła działa nie tylko siła ciężkości, lecz też napięcie nitki  $N$ .

Jeżeli te obie siły wprowadzimy, to punkt można uważać za swobodny i stosować równania

Newtona. Napięcie nitki  $N$  rozkładamy w kierunku osi  $xyz$ .



Mamy zatem:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = N \frac{x}{a}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg + N \frac{y}{a}$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = N \frac{z}{a}$$

Gdy te równania porównamy ze systemem równań na str. 106, widzimy, że  $N = 2\lambda$ . Mamy tak określone fizyczne znaczenie czynnika Lagrange'owskiego  $\lambda$ : ma on związek z napięciem nitki. Napięcie to nie jest z góry znane, bo zależy ono od ruchu, jaki będzie. Równujemy przeto  $\lambda$ . Można doleć równania tak otrzymane całkować. Już wyżej wspomnieliśmy, że dostalibyśmy tu funkcje eliptyczne. Wraz, gdybyśmy chcieli rachunek uprościć, ograniczylibyśmy się do wychyleń bardzo małych i tak dostalibyśmy wyrażenia, w których całkowania dałoby się przeprowadzić bez trudności. W te rzeczy jednak wchodzić nie będziemy i na tem zakończymy ruch punktu nieswobodnego i w ogóle dynamikę punktu, a przystąpimy do systemu punktów.

## System punktów.

System punktów tworzą punkty, które ulegają przemieszczeniu.

wo siłom zewnętrznym, częściowo wewnętrznym. Tem jest także ten wypadek objęty, gdzie pewne punkty spełniają warunki ruchu przez to, że zostają na pewnych powierzchniach lub krzywych, gdyż takie powierzchnie można zastąpić z dowolnem przybliżeniem przez cięta sztywne, złożone z punktów materialnych w niezmiennych odległościach (wskutek wewnętrznych sił międzyrobimowych). Definicja ta jest zatem bardzo ogólna i obejmuje także kowide maszynę. Można ją stosownie do potrzeby ograniczyć. Zaktualizując np. że odległości wszystkich punktów systemu między sobą mają przostawać niezmiennione wskutek odpowiednich sił wewnętrznych dostajemy określenie cięta sztywnego, a zatem też maszyny prostej (pręt sztywny, klin). My w tym rozdziale zajmować się będziemy systemem punktów w sensie ogólnym, gdzie siły pochodzą po części z zewnątrz, po części są to siły działające wewnątrz między punktami, ze z tych część może pochodzić od owych przymusowych warunków ruchu.

Każdy punkt materialny systemu można uważać za swobodny, gdy uwzględnimy wszystkie siły nań działające. Możemy tedy do kowidego stosować równania Newtona. Gdy oznaczymy przez  $X, Y, Z$  siły zewnętrzne i wewnętrzne bez sił przymusowych, przez  $\xi, \eta, \zeta$  siły wewnętrzne przymusowe tj. działające między punktami o niezmiennych odległości, dostaniemy dla kowidego z punktów systemu równania następujące:

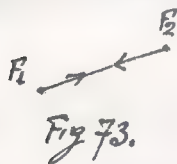
$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i + \xi_i & S_{x_i} \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i + \eta_i & S_{y_i} \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i + \zeta_i & S_{z_i} \end{aligned}$$

( $k = 1, 2, \dots, n$ ) Gdy te równania pomnożymy odpowiednio przez  $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$  dodamy i uporządkujemy według  $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$  będzie:

$$\sum_k \left[ \left( X_k - m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right) \delta x_k + \left( Y_k - m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} \right) \delta y_k + \left( Z_k - m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} \right) \delta z_k \right] =$$

$$= - \sum_k (\xi_k \delta x_k + \eta_k \delta y_k + \zeta_k \delta z_k).$$

Prawa strona tego równania przedstawia pracę wykonaną przez siły wewnętrzne, przymusowe. Te siły działają tak, że odległości pewnych punktów zostają niezmiennione. Weźmy pod uwagę dwa takie punkty np: 1 i 2. Według zasady dynamiki [str 45. 1]) siły tych punktów działają w kierunku łączącym. Praca wykonana przy przesunięciu tych punktów przez te siły będzie:



$$\xi_1 \delta x_1 + \eta_1 \delta y_1 + \zeta_1 \delta z_1 + \xi_2 \delta x_2 + \eta_2 \delta y_2 + \zeta_2 \delta z_2$$

przyczem:

$$\xi_1 = F_1 \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}$$

$$\xi_2 = -F_1 \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}$$

$$\eta_1 = F_1 \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}$$

$$\eta_2 = -F_1 \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}$$

$$\zeta_1 = F_1 \frac{z_2 - z_1}{r_{12}}$$

$$\zeta_2 = -F_1 \frac{z_2 - z_1}{r_{12}}$$

gdzie  $r_{12}$  oznacza odległość punktów 1 i 2. Restawiając te wyrażenia w wyrażeniu pracy, otrzymujemy jej wartość:

$$\frac{F_1}{r_{12}} \{ (x_2 - x_1)(\delta x_1 - \delta x_2) + (y_2 - y_1)(\delta y_1 - \delta y_2) + (z_2 - z_1)(\delta z_1 - \delta z_2) \}.$$

Jeż wobec całości:  $r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \text{const}$

$$d(r_{12}^2) = 2(x_2 - x_1)(\delta x_1 - \delta x_2) + 2(y_2 - y_1)(\delta y_1 - \delta y_2) + 2(z_2 - z_1)(\delta z_1 - \delta z_2) = 0$$



Zatem ta praca owa jest równa zero. Ze zaś to się stosuje do każdej pary punktów systemu, zatem cała prawa strona powyższej równości przedstawia praca wykonana przez siły, przymusowe jest równa zero. Równanie się zatem upraszcza:

$$\sum_k \left[ (X_k - m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2}) \delta x_k + (Y_k - m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2}) \delta y_k + (Z_k - m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2}) \delta z_k \right] = 0$$

Jest ono zatem warian pod założeniem, że  $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$  są składowe przesunięcia przygotowanego tj. zgodnego z warunkiem przymusowym.  $X_k, Y_k, Z_k$  są to siły całkowite z wyłączeniem sił, przymusowych. Siły reprezentujących warunki przymusowe a więc  $f_k, \eta_k, \xi_k$  w tym równaniu nie ma, bo wpływ ich jest identycznie zero.

Z tego równania ruchu dostajemy w jednej chwili, zaktualizując:  $\frac{d^2 x_k}{dt^2} = \frac{d^2 y_k}{dt^2} = \frac{d^2 z_k}{dt^2} = 0$  : warunek równowagi:

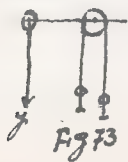
$$\sum_k (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k) = 0$$

Tj. praca przygotowania jest równa zero (Hosowalność np. klin, blok, śruba). Wzrostu wektorowym zapiszemy wyrażenie pierosze w formie:

$$\sum_k (f_k - m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2}) \delta x_k = 0$$

Drugie  $\sum_k f_k \delta x_k = 0$ .

Zastosowanie: Ruch po spadkowicy Atwooda: Ruch nastąpi przez nałożenie na szalki różnych mas  $m_1$  i  $m_2$ . Maszyna i siłownika promijamy: Siły działające są:  $Y_1 = m_1 g, Y_2 = m_2 g$ ,



$$X_1 = X_2 = Z_1 = Z_2 = 0.$$

skąd:

$$(Y_1 - m_1 \frac{dy_1}{dt^2}) \delta y_1 + (Y_2 - m_2 \frac{dy_2}{dt^2}) \delta y_2 = 0$$

gdzie  $\delta y_1, \delta y_2$  są przesunięciami przygotowanymi. Zakładamy, że sznurek nierozciągliwy:  $y_1 + y_2 = \text{const}$ ; stąd:  $\delta y_1 = -\delta y_2$  oraz

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{d^2 y_2}{dt^2}. \text{ Skąd:}$$

$$m_1(g - \frac{d^2 y_1}{dt^2}) - m_2(g + \frac{d^2 y_1}{dt^2}) = 0$$

Zatem istają następujące równowagi różniczkowe ruchu:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

Zależnie od wielkości  $m_1$  i  $m_2$  przyspieszenie będzie skierowane w dół lub w górę. Widzimy, że ruch będzie jednostajnie przyspieszony, ale inny niż gdyby każde z ciąż  $m_1$  i  $m_2$  niezależnie się poruszało.

2. Ruch wahadła sferycznego. Pręt odcięty masami  $m_1$  i  $m_2$  idealizujemy matematycznie przez założenie, że masę pręta można pominąć. Siły działające będą:  $X_1 = Z_1 = 0, X_2 = Z_2 = 0$

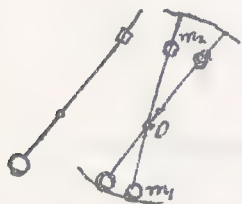


Fig 77.

$$Y_1 = m_1 g \quad Y_2 = m_2 g$$

Ruch masy  $m_1$  odbywa się po kole o promieniu  $\alpha_1$ , masy  $m_2$  po kole o promieniu  $\alpha_2$  około  $O$ . Pręt sztywny. Jeśli pręt zmieni położenie, przesunięcia podobne tylko do przeciętych kierunków

kach. Stąd :

$$\delta x_1 : \delta x_2 = -a_1 : a_2$$

$$\delta y_1 : \delta y_2 = -a_1 : a_2$$

$$\delta x_2 = -\delta x_1 \frac{a_2}{a_1}$$

$$\delta y_2 = -\delta y_1 \frac{a_2}{a_1}$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{d^2 x_1}{dt^2} \frac{a_2}{a_1}$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{d^2 y_1}{dt^2} \frac{a_2}{a_1}$$

Uwzględniając, że  $m_1$  porusza się po obwodzie koła, mamy:

$$x_1^2 + y_1^2 = a_1^2.$$

Powrotując się na wyrażenie naszej ogólnej masy:

$$(0 - m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}) \delta x_1 - (0 + m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \frac{a_2}{a_1}) \delta x_1 \frac{a_2}{a_1} +$$

$$(m_1 g - m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}) \delta y_1 - (m_2 g + m_2 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \frac{a_2}{a_1}) \delta y_1 \frac{a_2}{a_1} = 0 \quad \text{czyli równanie}$$

różniczkowe punktu będzie:

$$-\delta x_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \left\{ 1 + \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 + \right. \\ \left. + \delta y_1 \left\{ 2 \left( 1 - \frac{a_2 m_2}{a_1 m_1} \right) - \left( 1 - \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 \frac{m_2}{m_1} \right) \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right\} \right\} = 0$$

Tu określony jest ruch przez zmienne  $x_1, y_1$  pierwszego punktu.

Trzeba by tu jeszcze uwzględnić równanie koła, po którym się ruch odbywa, albo wprowadzić odpowiednie biegunowe, co byłoby najwygodniej. Rezultat końcowy dostać jednak można o wiele prościej powołując się na zasadę zachowania energii. Dlatego



rachunku nie kończymy tutaj, bo wrócimy do tego zadania później. Tu mieliśmy tylko na celu skazać metodę.

Dla systemu punktów mamy trzy ogólne zasady: zachowania energii, ruchu środka masy, momentów wycinkowych. Do ich wyprowadzenia przystępujemy:

Zasada zachowania energii mechanicznej. Znacząc przez  $X_i, Y_i, Z_i$  składowe sił zewnętrznych i wewnętrznych działających między punktami (gravitacja, nitka), mamy:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1 \quad dx_1$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = X_2 \quad dx_2$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = Y_1 \quad dy_1$$

$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = Y_2 \quad dy_2$$

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = Z_1 \quad dz_1$$

$$m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = Z_2 \quad dz_2$$

Mnożąc te równania odpowiednio przez  $dx_i, dy_i, dz_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), dodając je i porządkując, dostajemy:

$$m_1 \left( \frac{d^2 x_1}{dt^2} dx_1 + \frac{d^2 y_1}{dt^2} dy_1 + \frac{d^2 z_1}{dt^2} dz_1 \right) + m_2 ( \dots ) + \dots =$$

$$= (X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1) + (X_2 dx_2 + \dots) + \dots$$

Teraz możemy całkować. Po lewej stronie dostajemy energię kinetyczną, po prawej pracę. Całkując w granicach od pozycji początkowej  $p$  do końcowej  $k$ , i zauważając, że:

$$\frac{m_i}{2} \left[ \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] = m_i \frac{V_i^2}{2} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

napiżemy:

$$m_1 \frac{V_1^2}{2} + m_2 \frac{V_2^2}{2} + \dots \Big|_p^k = \int_p^k \{ [X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1] + [X_2 dx_2 + \dots] + \dots \}.$$

$X_i dx_i, Y_i dy_i, Z_i dz_i$  to pracy elementarne. Z nich  $\int_p^k$  to praca całkowita. Krótko więc rezultat ostatni pisząc, mamy:

$$L_k - L_p = P_p^k.$$

W przyrodzie zdarza się, że siły działające są potencjalne, tzn. że możemy je wyrazić jako ujemną pochodną cząstkową pewnej funkcji argumentów pozycji:

$$X_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad X_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad \dots$$

$$Y_1 = -\frac{\partial U}{\partial y_1}, \quad Y_2 = -\frac{\partial U}{\partial y_2}, \quad \dots$$

$$Z_1 = -\frac{\partial U}{\partial z_1}, \quad Z_2 = -\frac{\partial U}{\partial z_2}, \quad \dots$$

gdzie  $U = f(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots).$

Jeśli tak się rzecz ma, to prawa strona powyższej równości

napi'sze się:

$$P^k = - \int_p^k \left( \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial U}{\partial z_1} dz_1 + \left[ \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \dots \right] \right)$$

gdzie nawias { } przedstawia całkowitą różniczkę funkcji  $U$ . Zatem

$$L_k - L_p = -U_k + U_p \quad \text{czyli}$$

$$L_k + U_k = L_p + U_p = \text{Const.}$$

tj. suma energii kinetycznej i potencyalnej dla systemu punktów w każdej pozycji jest stała. Jeśli siły nie są potencyalne tj. nie ma funkcji  $U$  o wspomnianych własnościach, zasada ta nie jest prawdziwa. Warunki konieczne aby dany system sił przedstawiał siły potencyalne, jest jak to z definicji tych sił wynika, by zachodziło  $\frac{3n(3n-1)}{2}$  równości postatki:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} = \frac{\partial Y_k}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial Z_i}{\partial z_k} = \frac{\partial Z_k}{\partial z_i} \quad i \neq k$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial y_k} = \frac{\partial Y_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial X_i}{\partial z_k} = \frac{\partial Z_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial z_k} = \frac{\partial Z_k}{\partial y_i} \quad i \neq k$$

Siły potencyalne nazywamy z powodu zachodzenia dla nich zasady zachowania energii mechanicznej zachowawczymi.

Przykład:  $U = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}}$

Mechanika Ark XL.



gdzie  $r_{12}, r_{13}, r_{23}$  oznaczają odległości mas:  $r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ .

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{x_1 - x_2}{r_{12}} - \frac{m_1 m_3}{r_{13}^2} \cdot \frac{x_1 - x_3}{r_{13}} = X_1$$

Analogiczne wzory będą na  $X_2, X_3, Y_1, Y_2, \dots$ , gdzie  $\frac{x_1 - x_2}{r_{12}} = \cos \alpha_{12}$ ,  $\frac{x_1 - x_3}{r_{13}} = \cos \alpha_{13}, \dots$ . Będą to zatem siły wiodroju grawitacyjnej; w liczniku bowiem jest iloczyn mas, w mianowniku kwadrat odległości.

Ruch środka masy. Środkiem masy nazywamy punkt, określony przez współrzędne:

$$\xi = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}$$

$$\eta = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}$$

$$\zeta = \frac{\sum m_k z_k}{\sum m_k}$$

W symbolice wektorowej możemy te definicje napisać tak:

$$\textcircled{r} = i\xi + j\eta + k\zeta$$

lub wstawiając wartości:

$$\textcircled{r} = \frac{\sum m_k (ix_k + jy_k + kz_k)}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k \textcircled{r}_k}{\sum m_k}$$

Gdy uwzględnimy wszystkie siły działające na któryśkolwiek punkt systemu, możemy dać stosować równanie

ruchu swobodnego:

$$m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} = f_k$$

Równań tych będzie tyle, ile punktów systemu. Sumując je mamy:

$$\sum m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} = \sum f_k$$

Wobec tego, że masy i czas są niezmiennicze (rezultat to eksperymentalny), możemy równość powyższą napisać też:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum m_k r_k = \sum f_k$$

czyli według definicji środka masy:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[ \textcircled{x} \sum m_k \right] = \sum f_k.$$

Łub znając dla krótkości:  $\sum m_k = M$ ,  $\sum f_k = \textcircled{0}$ , mamy pożądaną równość:

$$M \frac{d^2 \textcircled{r}}{dt^2} = \textcircled{0},$$

oznaczając, że przyspieszenie środka masy jest takie, jakby tam wszystkie masy były skoncentrowane i jakby nań działała suma wszystkich sił.

Nadzi tu bezpośrednio, że siły wewnętrzne nie wpływają wcale na ruch środka masy, bo tworzą one działanie i oddziaływanie. Znoszą się tedy wzajemnie. O ile zatem na system działają tylko siły zewnętrzne, to przyspiesze-

nie środka masy  $= 0$ . Łatem środek masy poddziałaniem li tylko sił wewnętrznych porusza się z prędkością jednostajną. Jest to ważne przybliżenie dla naszego systemu planetarnego. Na tem polega cofanie się armaty w czasie strzału, funkcjonowanie Braunnenga, mitralierzy Maxima, wiostowanie itd. Na pozor ruchu łodzi polega na popychaniu, w istocie na zasadzie środka masy. Wiosłując nadajemy wodzie pewną prędkość, łódź otrzymuje ją w kierunku przeciwnym. O warinności środka masy przekonać się można przy wykakiwaniu z łodzi. Bardzo wiele zjawisk na tem polega. Podskoczenie np. w górę związane jest z odprchnięciem ziemi na dół.

Zasada zachowania pól lub ściślej zasada zachowania momentów wycinkowych. Z temsamem co przy każdym z obu poprzednich zasad założeniem możemy napisać:

$$m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} = f_k$$

Przypominając sobie własności iloczynu wektorowego, możemy napisać:

$$m_k \left[ r_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} \right] = [r_k f_k]$$

Lewą stronę tej równości możemy inaczej napisać. Za-



uważymy mianowicie, że

$$\frac{d}{dt} \left[ r_k \frac{dr_k}{dt} \right] = \underbrace{\left[ \frac{dr_k}{dt} \frac{dr_k}{dt} \right]}_0 + \left[ r_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} \right]$$

stąd powyższą równość napiszemy so:

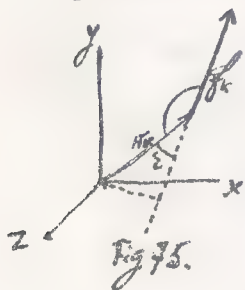
$$m_k \frac{d}{dt} \left[ r_k \frac{dr_k}{dt} \right] = [r_k f_k]$$

Rozciągając tę równość ważną dla każdego punktu, na system cały razem, dostajemy wyrażenie porządane:

$$\frac{d}{dt} \sum_k m_k \left[ r_k \frac{dr_k}{dt} \right] = \sum_k [r_k f_k] = \mathcal{M}$$

Rozważmy jego znaczenie fizyczne. Jest to przede wszystkim wektor, więc wielkość kierunkowa. Wsumie środkowej jest  $[r_k f_k]$ . Wartość bezwzględna tego iloczynu jest  $r_k F_k \sin(\widehat{r_k F_k})$ .

$$\sin(\widehat{r_k F_k}) = \sin \varepsilon$$



$F_k \cdot r_k \sin \varepsilon$  jest to iloczyn z siły i jej ramienia. Jest to zatem moment siły. Kierunek tego momentu jest prostopadły do płaszczyzny  $r_k, f_k$  ze strzałką skierowaną według umów

str 14.  $\sum [r_k f_k]$  jest momentem wypadkowym i oznaczamy dlatego  $\mathcal{M}$ . Wsumie lewej  $\frac{dr_k}{dt}$  oznacza prędkość. Zatem  $\left[ r_k \frac{dr_k}{dt} \right] = [r_k v_k]$ . Bezwzględna wartość

tego iloczynu przedstawia pole podwójne trójkąta którego



Fig 76.

bokami są  $x_k$  i  $y_k$ . Zatem  $[r_k \frac{dr_k}{dt}]$  oznacza prędkość wycinkową w sensie wektorowym. Jaki przedtem przychodziło nam prędkość wycinkowa, ale chodziło nam, tam

tylko o wielkość pola, tu uwzględniamy jeszcze kierunek według umów.  $m_k [r_k \frac{dr_k}{dt}]$  nazywamy momentem wycinkowym.  $\sum m_k [r_k \frac{dr_k}{dt}]$  to wypadkowy moment wycinkowy. Do tych rozważań znaczenie powyższego wyrażenia wypowiemy tak: Pochodna czasowa wypadkowego momentu wycinkowego jest równa wypadkowemu momentowi sił.

Z wyrażen' wektorowych możemy przejść do analitycznych przez proste rozpisanie. Według str 17. jest:

$$[r_k \frac{dr_k}{dt}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_k & y_k & z_k \\ \frac{dx_k}{dt} & \frac{dy_k}{dt} & \frac{dz_k}{dt} \end{vmatrix}, \quad [r_k f_k] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_k & y_k & z_k \\ X_k & Y_k & Z_k \end{vmatrix}$$

Stąd wyrażenie wypowiedzianej dopiero co zasady rozpadnie się na trzy wyrażenia:

$$\frac{d}{dt} \sum m_k (y_k \frac{dz_k}{dt} - z_k \frac{dy_k}{dt}) = \sum (y_k Z_k - z_k Y_k)$$

$$\frac{d}{dt} \sum m_k (z_k \frac{dx_k}{dt} - x_k \frac{dz_k}{dt}) = \sum (z_k X_k - x_k Z_k)$$

$$\frac{d}{dt} \sum m_k (x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt}) = \sum (x_k Y_k - y_k X_k)$$

Do wzorów tych dochodzi się bezpośrednio wychodząc pod  
znanemi założeniami z równań:

$$m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = X_k$$

$$m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} = Y_k \quad \dots + z_k$$

$$m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} = Z_k \quad \dots y_k$$

Mnożąc np. odpowiednio przez  $-z_k$ ,  $y_k$  drugie i trzecie  
równanie systemu, i sumując dostajemy:

$$\sum m_k (\frac{d^2 z_k}{dt^2} y_k - \frac{d^2 y_k}{dt^2} z_k) = \sum (Z_k y_k - Y_k z_k)$$

identyczne z pierwowzorem z poprzednich wyrażeń. Analogo-  
mie dostaniemy następne.

Łatwo z wyrażenia wektorowego dowieść że jedynie si-  
ły zewnętrzne wpływają na moment wycinkowy, wewnętrz-  
ne nie. Siły punktów 1 i 2 działają w kierunku takimiż:



Fig. 77.

$$f_1 = -f_2$$

Uważajmy sumę ich momentów:

$$[r_1 f_1] + [r_2 f_2]$$

$r_2 = r_1 + x f_1$  jak to wynika z trójkąta. Stąd.

$$[r_1 f_1] + [r_2 f_2] = [r_1 f_1] + [r_1 f_2] + [x f_1 f_2] = [r_1 f_1] + [r_1 (-f_1)] + x [f_1 f_1] = 0 \quad \text{c. b. d. o. stąd}$$



wypadkowy moment zostaje niezmienny pod względem wielkości i kierunku, jeśli tylko działają siły wewnętrzne.

Przykład na to daje następujące doświadczenie. Na sznurku

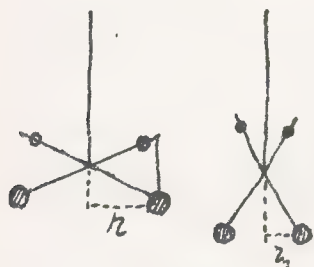


Fig 78.

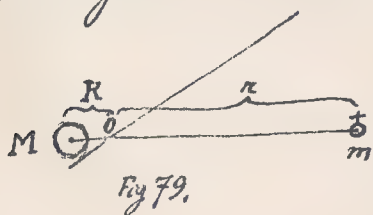
kręzą się prętki obciążone masami. Prętki te na końcach odcięte są innym sznurkiem, który w momencie ruchu przecina my lub przepalamy. Skutkiem tego prętki się składają, ale całość szybciej wiruje.

Im szybciej wirowanie tłumaczy się tem, że w systemie o siłach tylko wewnętrznych moment wypadkowy ma zostać niezmienny. Moment wypadkowy, gdy jeszcze prętki są rozłożone jest:  $r \frac{d\varphi}{dt} m$ , gdy złożone  $r_1 \frac{d\varphi_1}{dt} m$ . Wobec równości tych dwu wielkości a nierówności promieni  $r > r_1$ , musi zachodzić nierówność prędkości kątowej:  $\frac{d\varphi}{dt} < \frac{d\varphi_1}{dt}$ . Prędkość wzrośnie w stosunku kwadratowym. Stądż moment wypadkowy tłumaczy też niezmienną szybkość obrotu ziemi. O zachowaniu niezmienną szybkości obrotu świadczą rachunki astronomiczne, według których zgadzają się np. zaćmienia Słońca z ura-  
sami bardzo odległymi. O ile atoli zachodziłoby jakiś dywer-  
gencje, to jeszcze trudno orzec czy powoduje ją zmiana długości dnia czy też zmiana prędkości ruchu ziemi kół

Stońca czy też juno i drugie razem. Kiermimux długości dnia jest jeszcze kwestyą otwartą, bo niektórzy twierdzą, iż długość dnia uległa zmianie. Jest teoria, iż ziemia kurczy się. Stąd więc mu zasada zachowania momentu wyciercowych, powinna się szybciej obracać. Z drugiej jednak strony hamuje ten obrót księżyc wskutek przyptyków i odpływu morza. Nie wiadomo jednak w jakim stosunku te dwa wpływy pozostają do siebie.

Wyłożone uprzednio trzy ogólne twierdzenia: o zachowaniu energii mechanicznej, o zachowaniu pędu środka masy i o zachowaniu momentu wyciercowych ułatwiają nam rozwiązywanie zagadnień. Gdy jest dana np. jedna tylko swoboda ruchu, to wystarczy do rozwiązania zagadnienia zasada zachowania energii.

Jako przykład rozważymy ruch planet przyciąganych nie przez jakiś punkt niezmienny lecz słońce, które samo podlega ruchowi. Siły środkowe nie wpływają, jak wiemy, na



ruch środka masy tak, że on zostaje w spoczynku lub porusza się z prędkością jednostajną. Jeśli się środek masy po-

rusza to możemy przyjąć, że układ odniesienia porusza się

w tym samym kierunku i tej samej prędkości, tak iż nie pomie-  
rają one dwóch ruchów, bodeśmy mogli uważać środek masy za  
niezmienny i wrócić na dotychczasowe odniesienia. Oznac-  
my, że  $r$  jest odległością między Ziemią a Słońcem,  $R$  odległością między  
Słońcem a środkiem masy, a  $r_1$  odległością między Ziemią a  
środkiem masy. Wtedy mamy:

$$R + r = m + M$$

Jeżeli punkty  $M$  i  $m$  znajdują się na prostej, wia-  
dzącej przez środek Słońca, powróćmy się na uogólnienie dyfrak-  
cji. Środek masy, oznaczmy go przez  $G$ . Proste współrzędne  $y = z = 0$  będą

Stąd:  $\xi = \frac{Mx_1 + mx_2}{M+m}$   $\eta = \zeta = 0$  Zatem środek masy musi  
zostawać na bierzącej obu punktów. Wskazując więc  $\xi = 0$ ,  $x_1 = -R$ ,  $x_2 =$   
 $r$ , mamy powyższą proporcję. Tak wykorzystaliśmy zasadę  
zachowania ruchu środka masy. Teraz wróćmy do  
zasady bieżącej o zachowanie momentów wyinkowych:

Moment wyinkowy ziemi jest  $m r^2 \frac{d\phi}{dt}$ , Słońca  $M R^2 \frac{d\phi}{dt}$ . Jest

zatem:

$$m r^2 \frac{d\phi}{dt} + M R^2 \frac{d\phi}{dt} = \text{const} = C$$

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} \left( m + \frac{MR^2}{r^2} \right) = C$$

Wobec  $R^2 : r^2 = m : M$  jest  $r^2 \frac{d\phi}{dt} \left( m + \frac{MR^2}{r^2} \right) = C$



czyli

$$r^2 \frac{dp}{dt} = \frac{CM}{m(m+1)} = \alpha \quad (\text{stałe})$$

tj. prędkość wycinkowa ziemi jest wielkością stałą. Powtarzając to samo dla R doslibyśmy do wniosku, że również prędkość wycinkowa słońca jest stała.

Zwróćmy się jeszcze do twierdzenia pierwszego o zachowaniu energii mechanicznej. Energia kinetyczna ziemi jest  $\frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 \right]$ , słońca  $\frac{M}{2} \left[ \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + R^2 \left( \frac{dP}{dt} \right)^2 \right]$ . Siła przyciągania według Newtona:  $-\frac{\kappa mM}{(r+R)^2}$ . Potencjał zatem  $U = -\frac{\kappa mM}{r+R}$ . Zatem zasada zachowania energii napiszemy:

$$\frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 \right] + \frac{M}{2} \left[ \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + R^2 \left( \frac{dP}{dt} \right)^2 \right] - \frac{\kappa mM}{r+R} = \text{Const}$$

czyli

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \left[ 1 + \frac{m}{M} \right] + \frac{m}{2} r^2 \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 \left[ 1 + \frac{m}{M} \right] - \frac{mM\kappa}{r(1+\frac{m}{M})} = \text{Const}$$

stad: 
$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 - \frac{2M\kappa}{r(1+\frac{m}{M})^2} = \text{Const}$$

Wprowadzając skrócenia na wielkości stałe:

$$\frac{2M\kappa}{(1+\frac{m}{M})^2} = \beta \quad \text{Const} = \frac{E+U}{\frac{m}{2}(1+\frac{m}{M})} = \gamma \quad \text{i przypomni}$$

najbardziej, że  $r^2 \frac{dp}{dt} = \alpha$ , skutkiem czego:  $\frac{dr}{dt} = \left( \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \right) = \left( \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{\alpha}{r^2} \right)$ , możemy napisać:

$$\left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{\alpha^2}{r^4} + \frac{\alpha^2}{r^2} - \frac{\beta}{2} = \gamma \quad \text{Stąd zaś}$$

$$\int \frac{\alpha dz}{z^2 \sqrt{\gamma + \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha^2}{2^2}}} = \int d\varphi \quad \text{czyli}$$

$$\int \frac{dz}{z^2 \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha^2} + \frac{\beta^2}{4\alpha^4} - \left(\frac{\beta}{2\alpha^2} - \frac{1}{2}\right)^2}} = \int d\varphi$$

Wprowadzając skrótienia  $\frac{\beta}{2\alpha^2} + \frac{\beta^2}{4\alpha^4} = A^2$ ,  $\frac{\beta}{2\alpha^2} - \frac{1}{2} = z$ ,  
mamy  $\frac{dz}{z^2} = d\varphi$  oraz całka po lewej stronie przyjmuje kształt:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{A^2 - z^2}} = \varphi + \text{Const}$$

$$\int \frac{d\left(\frac{z}{A}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{A}\right)^2}} = -\arccos \frac{z}{A} = \varphi + \text{Const}$$

$$\frac{z}{A} = \cos(-\varphi + \text{Const})$$

Kładąc  $\text{Const} = 0$ , co przez dobór położenia  $z$  można zawsze osiągnąć, mamy w dalszym ciągu:

$$z = A \cos \varphi = \frac{\beta}{2\alpha^2} - \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{1}{\frac{\beta}{2\alpha^2} - A \cos \varphi} \quad \text{czyli}$$

$$R = \frac{\frac{2\alpha^2}{\beta}}{1 - \frac{2A\alpha^2}{\beta} \cos \varphi}$$

Kładąc  $\frac{2\alpha^2}{\beta} = p$ ,  $-\frac{2A\alpha^2}{\beta} = \varepsilon$  mamy równanie przecięcia stożkowego:

$$R = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

Wiemy, że zależnie od tego, czy  $\varepsilon \leq 1$ , równanie to

przedstawia elipsę, parabolę lub hiperbolę. Zależnie więc od  
tego z ruch planety odbywać się będzie po jednej z tych  
krzywych. Lecz

$$\varepsilon = -\frac{2A\alpha^2}{\beta} = \pm \frac{2\alpha^2}{\beta} \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}} \quad \text{Biorąc}$$

$$\text{znak + mamy: } \varepsilon = \frac{2\alpha}{\beta} \sqrt{\gamma + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}} = \sqrt{\frac{4\alpha^2\gamma}{\beta^2} + 1}$$

$$\varepsilon \leq 1, \quad \text{gdy } \gamma \leq 0$$

Lecz  $\gamma = \frac{E+U}{\frac{m}{2}(1+\frac{m}{M})}$ . Zależnie więc, przy danych masach,

od wielkości energii ruch będzie się odbywał po elipsie, paraboli lub hiperboli. Zauważymy, że nie wchodzi tutaj w grę kierunek, w jakim się ruch odbywa. Zależy on tylko od energii kinetycznej w pewnej chwili; dalszy ruch zależy już od pewnego stosunku energii i mas. W szczególności dla Ziemi z obserwacji wiemy, że porusza się po elipsie...

Wyciągniemy jeszcze wnioski odnośnie do trzeciego prawa Keplera. Zapytamy się, ile wynosi  $\frac{T^2}{a^3}$ ? Jeśli droga odbywa się po elipsie, której powierzchnia jest  $ab\pi$ , a przedział wycinkowa wynosi  $\frac{\alpha}{2}$ , to czas obiegu  $T = \frac{ab\pi}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2ab\pi}{\alpha}$ . Zatem:  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4a^2b^2\pi^2}{a^2a^3} = \frac{4\pi^2}{a^2} \cdot \frac{b^2}{a} = \frac{4\pi^2}{a^2} p =$

$$= \frac{4\pi^2}{a^2} \cdot \frac{2\alpha^2}{\beta} = \frac{8\pi^2}{2M_K} \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-2} = \frac{4\pi^2}{M_K} \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-2} = k. \quad \text{Gdy bieżąca}$$



my brać pod uwagę różne planety, o różnych masach  $m$ , to i będzie state  $\frac{m}{M}$  prawo Keplera będzie ściśle warne o tyle, o ile stosunek  $\frac{m}{M}$  jest wielkością znikomo małą. Dla wielkich planet naszego systemu: Jowisza (1300 masy Słońca), Saturna, Neptuna są oczywiście znowu nie ostatecz-  
stwa. Gdybyśmy jednak wyobrażili sobie system planetarny taki, iż masy  $m$  wszystkich planet są równe, albo też znikomo małe w porównaniu do masy Słońca, to dla takiego systemu będzie prawo Keplera byłoby ściśle warne.

## Ciała Sztuczne.

Rozważania kinetyczne. Rozpatrzmy najprzód ruch ciała sztucznego pod względem czysto geometrycznym. Pozycja bryły jest określona przez pozycję trzech jej punktów, bo każdy inny punkt jej ma już z powodu statycznych odległości położenie określone względem tych trzech. Ciało sztuczne można z pozycji I przeprowadzić do dowolnej pozycji II zawsze zapomocą dwóch proce-  
sów: 1° wykonywujemy przesunięcie posuwiste (trans-



Fig 80.

dotychczasowe) tak by np. punkt A przeszedł w położenie  $A'$ .  
 2° Skrećmy to ciało tak, by punkt B przeszedł w  $B'$ ,  
 zaś C w  $C'$ . Jeśli zmiany te są skończone, to układy na nie  
 są zawile. Jeśli jednak przesunięcia są nieskończone  
 małe, sprawa upraszcza się. Ograniczmy się zatem do  
 rozpatrywania tych ostatnich.

Gdy ciało wykona przesunięcie posuwiste, nieskończenie  
 małe, to wszystkie jego punkty doznają, prze-  
 sunięć równoległych i równo-wielkich. Jeśli  
 więc porzucy punktu poszczególnego okręśło  
 na jest wektorem  $r_k$ , to zmiana tego wektora przy tem prze-  
 sunięciu oznaczy się  $dr_k$ . Że zaś zmiany wszystkich punkt.  
 tów są jednakowe, zatem:

$$dr_k = dr_0 \quad (\text{przesunięcia wspólne}).$$

i  $dr_0$  można uważać jako przesunięcie początku układu.

Gdy ciało wykona nieskończenie mały obrót około  
 jakiejś osi przechodzącej np. przez początek ukła-  
 du, to każdy punkt  $P_k$  poruszy się po  
 łuku odpowiadającym kątowi nie-  
 skończenie małemu  $\varphi$  prostopadle do

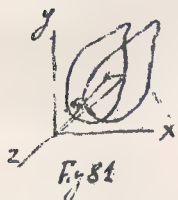


Fig. 81

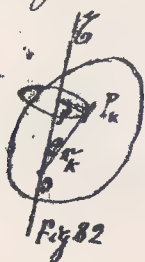


Fig. 82

osi obrotu i promienia  $\pi_k$ . Wielkość bezwzględna tego przesunięcia jest:  $\pi_k \sin \theta. \varphi$ . Przedstawia to bezwzględną wielkość iloczynu wektorowego:

$$[d\gamma. \pi_k]$$

jeśli przez  $\gamma$  narysujemy kręwekosi, a  $d\gamma$  wielkość obrotu, którą sobie na tej osi odcinamy. Również kierunku ruchu punktu zgadza się z kierunkiem iloczynu  $[d\gamma. \pi_k]$ . Zatem iloczyn ów wektorowy przedstawia powyższe przesunięcie punktu  $P_k$  przy obrocie ciała. Jest on dla różnych punktów różny.

Ogólne przesunięcie nieskończone małe, uwzględnianego punktu będzie sumą <sup>geometryczną</sup> ów składowych: Narysujemy je:

$$(a) \quad d\pi_k = d\pi_0 + [d\gamma. \pi_k].$$

Z takiego przedstawienia rzeczy można wyciągnąć całą szereg wniosków. Widzimy np. szereg obrotów nieskończenie małych dać się przedstawić sumą. Wykreślmy sobie wektory odpowiednich obrotów. Można je geometrycznie dodawać:



Fig 83.

$$[d\gamma_1. \pi] + [d\gamma_2. \pi] = [(d\gamma_1 + d\gamma_2) \pi]$$

Powyższą własność zastosować można np. przy rozważaniu



obrotów nieskończenie małych koło osi układu prostokątnego  $x, y, z$ . Niech  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$  przedstawiają odpowiednio wielkości obrotów koło osi  $x, y, z$ , to rezultat



Fig. 84.

tych obrotów przedstawi nam wektor  $\delta$  który jest przekątną prostopadłościanu

zbudowanego na wektorach składowych. Podobnie, oczywiście jak większą ilość obrotów możemy zastąpić przez jeden wypadkowy, tak też możemy obrot wypadkowy rozłożyć na składowe. Porządek składania dowolny; zatem prawo przemienności ważne. Jednym słowem obroty nieskończenie małe są takie same wielkości, jak prędkości, przyspieszenia, siły.

Przez podzielenie równości (a) przez  $dt$  przechodzimy do prędkości:

$$(b) \quad v_k = v_0 + [\dot{u}_0, r_k]$$

Jest prędkość, jaką ma punkt ciała styconego przy przesunięciu ogólnem nieskończenie małym składowe się z prędkości postępowej:  $v_0$  i prędkości obrotowej:  $[\dot{u}_0, r_k]$ . Przyczem zauważymy, że wielkości opatrzone indeksem: 0 są wspólne wszystkim punktom ciała

natomiaś owe ośkośniki:  $\kappa$  są indywidualne.

Równania (a) i (b) wyrażone w formie wektorowej rozpadają się przy przejściu do form analitycznych przez rozpisanie według wektorów jednostkowych  $i, j, k$  każde na trzy; przyczem prawe strony każdego rozpadną się na sześć składników. Wszystkie te: sześć składników, określają ruch ciała sztywnego. Owiadcemy stąd, że ciało sztywne posiada sześć stopni swobody ruchu.

Mógłaby się na ruch ciała sztywnego rozpatrywać z innego nieco punktu. Tak czyni np. Ball w swym dwutomowym dziele traktującym o teorii śrub. Przez ruch śrubowy rozumie on ruch ciała sztywnego złożony z ruchu postępowego i obrotowego. Ruch ten jest uogólnieniem ruchu śruby normalnej; w tej ostatniej ruch postępowy występujący przy skręceniu odbywa się w kierunku osi obrotu; wypadek więc specjalny.

Równania ruchu ciała sztywnego. wobec tego, że ciało sztywne stanowi szczególny wypadek systemu punktów, dla którego równanie ruchu już wyprowadziliśmy (str 114), więc dla ciała sztywnego będzie ono również ważne; wysta-

czy tedy powprowadzić w równanie owo wyrażenia jakieśmy tu przyjęli. Równanie owo w formie analitycznej by to:

$$\sum_k (X_k - m_k \frac{dx_k}{dt^2}) \delta x_k + (Y_k - m_k \frac{dy_k}{dt^2}) \delta y_k + (Z_k - m_k \frac{dz_k}{dt^2}) \delta z_k = 0$$

$\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$  wyrażają przesunięcia przygotowane. Tutaj przesunięcia przygotowane wyrażone są przez  $\delta x_k$ , bo te oznaczają "drogę" warunkową ruchu ciała sztywnego. Trzeba je rozłożyć i wstawić: jest:

$$\delta x_k = i dx_k + j dy_k + k dz_k$$

$$\delta x_0 = i dx_0 + j dy_0 + k dz_0$$

$$dx_0 = i d\alpha + j d\beta + k d\gamma$$

$$x_k = i x_k + j y_k + k z_k$$

$$\delta x_k = \delta x_0 + [dx_0 x_k]$$

Zatem

$$i dx_k + j dy_k + k dz_k = i dx_0 + j dy_0 + k dz_0 + \begin{vmatrix} i & j & k \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}, \text{ czyli}$$

$$\delta x_k = \delta x_0 + z_k \delta \beta - y_k \delta \gamma$$

$$\delta y_k = \delta y_0 + x_k \delta \gamma - z_k \delta \alpha$$

$$\delta z_k = \delta z_0 + y_k \delta \alpha - x_k \delta \beta,$$

przez co zauważymy, że przesunięcia dla dowolnego punktu



ciata indywidualne mają indeks:  $\kappa$ , zaś przemieszczenia wspólne dla całego ciata indeksu tego nie mają. Teraz trzeba by te wyrażenia wstawić w napisane równanie ruchu. Sprawa przedstawia się jednak prościej, gdy użyjemy symboliki wektorowej. Napijmiemy więc  $\kappa$  równania ruchu (str 114).

$$\sum_{\kappa} \left( f_{\kappa} - m_{\kappa} \frac{d^2 r_{\kappa}}{dt^2} \right) \delta r_{\kappa} = 0$$

Wobec:  $\delta r_{\kappa} = \delta r_0 + [\delta \zeta_0, r_{\kappa}]$ , równanie to napiszemy:

$$\sum_{\kappa} \left( f_{\kappa} - m_{\kappa} \frac{d^2 r_{\kappa}}{dt^2} \right) \delta r_0 + \sum_{\kappa} \left( f_{\kappa} - m_{\kappa} \frac{d^2 r_{\kappa}}{dt^2} \right) [\delta \zeta_0, r_{\kappa}] = 0$$

Wskładnikowi pierwszemu tego wyrażenia można  $\delta r_0$  jako niezależne od sumowania względem  $\kappa$  wyjąć przed znak sumy.

Wskładnikowi drugiemu wobec oczywistej prawie własności iloczynu skalarnego:  $(a, [b, c]) = (b, [a, c]) = (c, [b, a])$ , i niezależności  $\delta \zeta_0$  od zmiennej  $\kappa$ , można  $\delta \zeta_0$  wyciągnąć przed znak sumy i całe wyrażenie napisać:

$$\delta r_0 \sum_{\kappa} \left( f_{\kappa} - m_{\kappa} \frac{d^2 r_{\kappa}}{dt^2} \right) + \delta \zeta_0 \sum_{\kappa} [r_{\kappa} \left( f_{\kappa} - m_{\kappa} \frac{d^2 r_{\kappa}}{dt^2} \right)] = 0$$

Teraz zaś wobec zupełnej dowolności czynników  $\delta r_0$  i  $\delta \zeta_0$ , byle były one nieskończenie małe, powiemy: powyższe równanie może zachodzić tylko w tym razie, gdy osobno każdą do dodajnik jest równemu zero. Otrzymujemy stąd

dwa równania określające ruch ciała sztywnego:

$$\sum_k \mathbf{f}_k = \sum_k m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2}, \quad \sum_k [\mathbf{r}_k \mathbf{f}_k] = \sum_k m_k \left[ \mathbf{r}_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} \right]$$

Skoro z tych dwu równań można zrobić w znany sposób noi trzy, przez co dojdziemy do wywożeń analitycznych ruchu, co bezpośrednio byłobyśmy uzyskali wykonując wspomniane podstawienia w analityczną formę d'Alemberta str 137. Równania te będą:

$$\sum_k X_k = \sum_k m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2}, \quad \sum_k (y_k Z_k - z_k Y_k) = \sum_k m_k (y_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} - z_k \frac{d^2 y_k}{dt^2})$$

$$\sum_k Y_k = \sum_k m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2}, \quad \sum_k (z_k X_k - x_k Z_k) = \sum_k m_k (z_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} - x_k \frac{d^2 z_k}{dt^2})$$

$$\sum_k Z_k = \sum_k m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2}, \quad \sum_k (x_k Y_k - y_k X_k) = \sum_k m_k (x_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} - y_k \frac{d^2 x_k}{dt^2}).$$

Z owych równań ruchu można w jednej chwili dojść do warunków równowagi ciała sztywnego, zakładając, że wszystkie przyspieszenia są równe zeru. Tak dostaniemy w symbolice wektorowej jako warunki równowagi:

$$\sum_k \mathbf{f}_k = 0, \quad \sum_k [\mathbf{r}_k \mathbf{f}_k] = 0$$

z warunków równowagi ciała sztywnego są: 1° wypadkowa wszystkich sił działających na to ciało ma być równa zero.

2° wypadkowy moment wszystkich sił działających musi być równy zero. (Określenie wypadkowego momentu s. 8 str 123).

Przy wzięciu równań analitycznych warunki te wyrażą się:

$$\sum_k X_k = 0, \quad \sum_k (y_k Z_k - z_k Y_k) = 0.$$

$$\sum_k Y_k = 0, \quad \sum_k (z_k X_k - x_k Z_k) = 0$$

$$\sum_k Z_k = 0, \quad \sum_k (x_k Y_k - y_k X_k) = 0$$

tj. wszystkie siły muszą być równe zero i momenty się również.

Rozważania syntetyczne. Do powyższych równań ruchu i równowagi ciała sztywnego doszliśmy drogą argumentacji rachunkowej. Można jednak do tych samych wniosków dojść przez argumentację myślową syntetyczną:

Wyobraźmy sobie bryłę, na którą działają różne siły.



Fig 85.

Pytamy się, jakie są warunki równowagi, w razie jeśli ona zachodzi, a jeśli nie zachodzi równowaga, to jaki nastąpi ruch?

By na te pytania odpowiedzieć, rozważymy różne sposoby składania sił. Tu jest jedna ogólna zasada: jeśli na ciało sztywne działa jakaś siła, to skutki jej działa-



ma będą zawsze takie same byle siła byłoby takasama i kierunek taki sam. Punkt zaczepienia siły jest obojętny



Fig 86.

o ile jest tylko przesunięty w kierunku siły. Jedni zresztą tę chca udowodnić z warunków symetrii inni powiadaaja, że

to fakt doświadczalny. Fakt jest, że wnioski wyprowadzone z tej zasady zgadzaja się z doświadczeniem. My więc przyjmujemy zasadę tę jako pewnik.



Jeśli siły dwie działaja na ten sam punkt, to wypadkowa ich będzie przedstawiona przez przekątne równoległoboku sił. Jeśli punkty, na które siły działaja, są różne, natenczas przytłumamy kierunki sił, aż do punktu przecięcia się i pomyslmy sobie, że tam owe siły zaczepiaja, przez co ten wypadek mamy sprowadzony na poprzedni.



Fig 87

Kierunki sił mogą się jednak nie przeciąć choć są dowolnie przytłumione w razie, gdy są równoległe albo wchrowate.

Wracie gdy  $P$  i  $Q$  są równoległe, pomyslmy sobie siły wręcz przeciwe  $f$ , których działanie więc znosi się. Przy pomocy sił

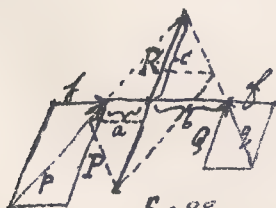


Fig 88



zadana siła wypadkowa.

W razie drugim nieprzecinania się się  $\delta$  i  $t$  w razie ich wiotkości dość jest poprowadzić przez punkty zaczepienia  $P$  i  $Q$

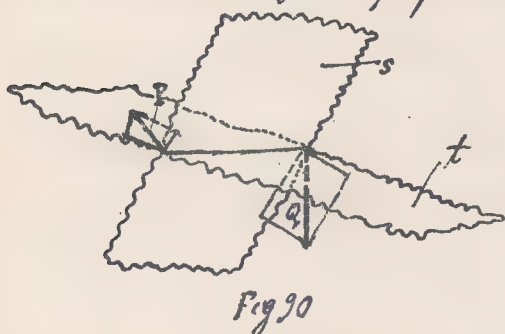


Fig 30

dwie dowolne płaszczyzny  $s$  i  $t$  i siły  $P$  i  $Q$  rozłożyć na składowe według równoległoboków, których po dwa boki leżą na owych płaszczyznach.

Skutek tego spowodujemy ten wypa-

dek do wypadku, gdy siły leżą w jednej płaszczyźnie, co jużesmy przedtem rozważyli.

Mozemy teraz zająć się parą  $\delta$  i  $t$ . Para  $\delta$  i  $t$  powoduje oczywiście obrót systemu około jakiejś osi. Oś ta, gdy uwzględniamy tylko dwa punkty systemu stywanego jest w środku między temi oboma punktami. Można ogólny wypadek, gdzie siły są dowolnie do łącznicy obu punktów nachy-



a)



b)

Fig 31

lone zredukować do wypadku szczególnego, gdzie siły są prostopadłe do owej łącznicy a to albo przez

wprowadzenie odpowiednich  $\delta$  i  $t$  pomocniczych  $f$  Fig 31 a), albo przez skrócenie łącznicy o pewien kąt Fig 31. b).



Takie pary sił równowazią się, jeśli momenty sił są jednakowe,

tj. jeśli :  $P.a = Q.b$ .

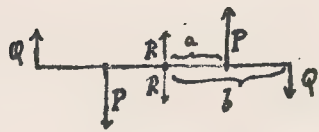


Fig 92 a)

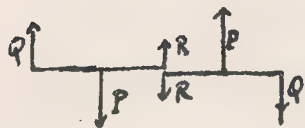


Fig 92 b)

Dla słowa wystarczy wprowadzić siłę pomocniczą  $R = P - Q$ , która łączyła w środku. Dwie takie siły przeciwne w tym samym punkcie działające unoszą się.

System taki sił (Fig 92 a)) można rozważać jako z dwóch części złożony (Fig 92 b)). Każda

z tych części jest w równowadze, bo siła  $P = R + Q$  przy założeniu, że  $P:Q = b:a$ . Łatwo to widzieć z uwagi na Fig. 88.

Powyższe rozważania równowagi pary sił przeprowadziliśmy przy założeniu, że ramiona sił mają jednakowe kierunki. Równowaga będzie miała zachodzić także wtedy, gdy je będziemy przeciwnie. Wykażemy w tym celu równoważność działania

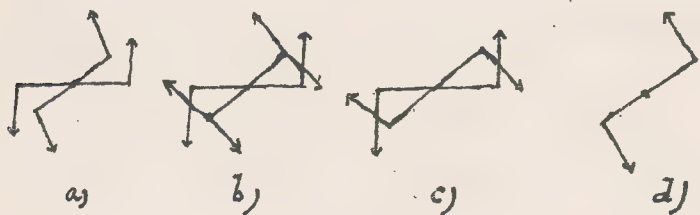


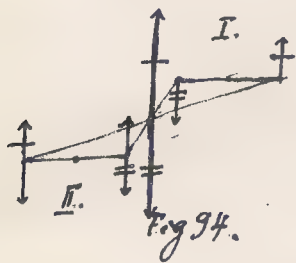
Fig 93

pary sił przy przekształcaniu jej. Równoważność ta zachodzi 1°

gdy parę sił około tej samej osi skrócimy. Pomysł my sobie tworząc pomocnicze pary sił wzajemnie przeciwne dodane do pierwotnej pary sił (Fig 93 b).

Dodanie takich dwu par sił warunków równowagi wcale nie zmienia. Mają one dowolny kierunek i wielkość. Te ostatnią pomysłmy sobie tak dobraną, że jest ona równa wielkości pierwotnej pary sił. Skutek będzie ten, że jedna z pomysłanych par sił zmiesze się z pierwotną (Fig. 93 c) i porostanie stała druga dodana para sił.

2°. Pomysłmy sobie parę sił przesuniętą w płaszczyźnie własnej równoległe (Fig. 94). Znowa zachodzić



będzie równowaga sił działających pary sił w tej nowej pozycji z parą sił pierwotną.

By to wykazać, powieźmy, że do pary

sił dodajemy system dwu par sił pomocniczych, których działanie się znosi. Łącząc teraz odpowiednio punkty, jak to wskazuje Fig. 94, możemy rozdzielić dwa systemy sił równoległych i równych jednokrotnie i dwukrotnie poprzekreslanych. System ten oczywiście zostaje w równowadze, a porostaje tylko para sił niepoprzekreslanych jako skutek operacji nie zmieniającej warunków równowagi.

Może też para sił występować z płaszczyzną własnej. Aby się o tem przekonać wystarczy zwrócić się do Fig. 94, ale przedstawic' teraz sobie rzecz tak, że dodany system II występuje

a przesuwamy pary sił I. Argumentacja wreszcie ~~dalej~~ jest  
takosama.

Widzimy więc z tych rozważań, że możemy parę sił dowolnie  
przesuwać nie zmieniając przez to skutków jej działania przy  
zatożeniu: że momenty sił, czyli wprowadzając pojęcie mo-  
mentu pary sił tj iloczyn z siły i oddalenia obu sił, że mo-  
ment pary sił i oś postają jednakowe. Działanie więc pary  
sił zależy tylko od momentu i kierunku osi czyli para  
sił jest wektorem. Ważne są więc dla niej działania określone  
dla tychże.

Dla przykładu podamy np. jak się dodaje dwie pary sił.  
Dla ogólności niech uważane pary sił mają różną oś i róż-  
ne momenty. Powołując się na poprzednie wywoły, że można  
pary sił dowolnie przesuwac byle oś zachowała swój kierunek,  
pomysłny, żeśmy jedną z danych paru par sił tak operowali,  
że wreszcie ramiona sił dokładnie się nakryły z ramionami  
drugiej pary sił. Oś oczywiście i momenty sił pozostały nie-  
zmienione ze względu na kierunek i wielkość. Złożenie teraz

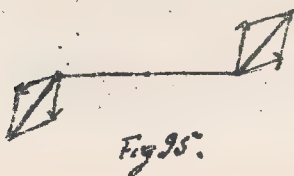


Fig 35.

tych dwóch par sił redukuje się do skła-  
dania sił. Łatwo to uogólnić na więcej  
par sił.



Na podstawie powyższych wyników łatwo już jest rozwarzyć ogólny wypadek, gdzie siły jak bądź rozłożone działają na ciało sztywne. Oto każdą siłę  $F$  zastąpimy przez

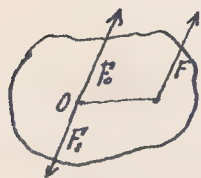


Fig 96

siłę  $F_0$ , która zaczepia w punkcie  $O$  wraz z parą sił  $F, F_0$ . Wszystkie siły  $F_0$  składowy w wypadkową i tak samo wszystkie pary sił zastąpimy przez wypadkową parę sił. Węc ostatecznie ruch jakoter równowaga ciała sztywnego zależy będzie od owej siły wypadkowej i pary sił wypadkowej. Jeśli czynniki owe nie są równe zero to jest ruch, jeśli natomiast równają się zero, to jest równowaga. Ależ właśnie powiększenia owe są równoważne równaniom ruchu i równowagi, jakieśmy wyprowadzili na str 139 i 140; trzeba by je tylko ująć w formę matematyczną.

Rozwiazania równań ruchu. Dla wygody zwróćmy się do równań ruchu w formie wektorowej:

$$\sum_k \mathcal{F}_k = \sum_k m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} \quad , \quad \sum_k [\mathbf{r}_k \mathcal{F}_k] = \sum_k m_k \left[ \mathbf{r}_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} \right]$$

Powinno te można przy wprowadzeniu określenia środka masy:  $\textcircled{M} = \frac{\sum m_k r_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k r_k}{M}$  wyrazić prościej:

Pierwsze:

$$\sum f_k = \sum m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum m_k r_k = \frac{d^2}{dt^2} M \textcircled{M} \text{ czyli}$$

$$(a) \quad \sum f_k = M \frac{d^2 \textcircled{M}}{dt^2}$$

Powiada ono, że środek masy ciała sztywnego doznaje takiego przyspieszenia, jakoby w nim wszystkie masy były skoncentrowane i jakoby w nim zaczęła to wypadkowa wszystkich sił. Jest to tylko powtórzenie odnośnego prawa, jakieśmy kiedyś wyprowadzili dla systemu punktów.

Króćcież drugie równanie, wypiszmy je jeszcze w formie:

$$\sum_k [r_k f_k] = \frac{d}{dt} \sum m_k [r_k \frac{dr_k}{dt}]$$

nie powiada nam nic nowego nadto, coś my się już przy systemie punktów dowiedzieli tj. że moment wypadkowy sił równa się czasowej pochodnej momenta wycinkowego wypadkowego. Wprowadźmy jeszcze w to wyrażenie

określenie środka masy. Niech S będzie środkiem masy. Weź transformacyjny



Fig 97.

bedzie:  $r_k = \textcircled{M} + r_S$  ( $r_S = r_k' \text{ krótko } r_S$ )

gdyż  $\mathbf{r}_s$  oznacza wektor dowolnego punktu ciała sztywnego względem środka masy  $S$ . Równanie drugie przyjmie kształt:

$$\sum [\mathbf{r}_k \mathbf{f}_k] + \sum [\mathbf{r}_s \mathbf{f}_k] = \sum m_k [\mathbf{r}_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2}] + \sum m_k [\mathbf{r}_k \frac{d^2 \mathbf{r}_s}{dt^2}] +$$

$$\sum m_k [\mathbf{r}_s \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2}] + \sum m_k [\mathbf{r}_s \frac{d^2 \mathbf{r}_s}{dt^2}]$$

Wyrażenie to uprości się:

$$\sum [\mathbf{r}_k \mathbf{f}_k] = [\mathbf{r}_k \sum \mathbf{f}_k] = M [\mathbf{r}_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2}]$$

$\sum m_k [\mathbf{r}_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2}] = M [\mathbf{r}_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2}]$ . Zatem pierwszy wyraz po lewej i pierwszy po prawej stronie zniósą się.

Nobis definicji środka masy  $\mathbf{r}_k = \frac{\sum m_k \mathbf{r}_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k \mathbf{r}_k}{M}$

$$\sum m_k \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k M = \sum m_k \mathbf{r}_k + \sum m_k \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_k M + \sum m_k \mathbf{r}_s$$

Zatem  $\sum m_k \mathbf{r}_s = 0$  oraz  $\sum m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_s}{dt^2} = 0$ , a stąd

$$\sum m_k [\mathbf{r}_k \frac{d^2 \mathbf{r}_s}{dt^2}] = 0 \quad \sum m_k [\mathbf{r}_s \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2}] = 0$$

Ostatecz nie wiemy, gdy dla jednostajności znakowania podajemy przy wszystkich wielkościach podległych sumowaniu znaków:  $s$ , przez co pozyskacie żadnych istotnych zmian nie wprowadzimy, dostaniemy drugie równanie ruchu odniesione do środka masy:

$$(b) \quad \sum [\mathbf{r}_s \mathbf{f}_k] = \sum m_s [\mathbf{r}_s \frac{d^2 \mathbf{r}_s}{dt^2}]$$

$$= \frac{d}{dt} \sum m_s [\mathbf{r}_s \frac{d \mathbf{r}_s}{dt}]$$



Równanie to zupełnie jest takie same jak poprzednie odniesione do jakiegobądź punktu jako początku układu. Wypadkowy moment się nie zależy od wyboru początku układu.

Reasumując to, cośmy o ruchu ciała sztywnego rozważali, powiemy: Ruch ciała sztywnego składa się z dwu części: z ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego koło środka masy; pierwszy ruch określony jest równaniem (a) str 148, drugi równaniem (b) str 149. Oba ruchy są niezależne od siebie.

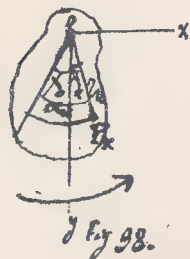
Do wniosków tych można dojść naturalnie tą drogą analityczną, albo wypisać można równania odnośne po prostu przez rozpisanie równań (a) i (b). Będzie:

$$\begin{aligned}\sum X_k &= M \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2}, \quad \sum (\eta_k Z_k - \zeta_k Y_k) = \sum m_k (\eta_k \frac{d^2 \bar{y}_k}{dt^2} - \zeta_k \frac{d^2 \bar{x}_k}{dt^2}) \\ \sum Y_k &= M \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2}, \quad \sum (\zeta_k X_k - \xi_k Z_k) = \sum m_k (\zeta_k \frac{d^2 \bar{x}_k}{dt^2} - \xi_k \frac{d^2 \bar{y}_k}{dt^2}) \\ \sum Z_k &= M \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2}, \quad \sum (\xi_k Y_k - \eta_k X_k) = \sum m_k (\xi_k \frac{d^2 \bar{y}_k}{dt^2} - \eta_k \frac{d^2 \bar{x}_k}{dt^2}),\end{aligned}$$

gdzie  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  oznaczają współrzędne środka masy,  $\xi_k, \eta_k, \zeta_k$  współrzędne punktu względem środka masy jako początku układu.

Ruch postępowy rozważaliśmy już w dynamice punktu. Wystarczy tedy zająć się tutaj ruchem obrotowym ciała sztywnego.

niego. Uważajmy więc jakiegoś ciała sztywnego obracającego się nie-  
to osi stałe w przestrzeni praktycznej w kierunku znanym  
strzałką. Dla prostoty przyjmijmy, że oś obrotu pokazuje się np.  
z osią  $z$ . Na rysunku pomysłowym w płaszczyźnie  $xy$  redukuje się ona do punktu  $o$ .



Równanie ruchu obrotowego ważne tu,  
gdy się powrócamy choćby np. na str. 139, będzie:

$$R = \frac{d}{dt} \sum m_k (x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt})$$

tj. moment sił obracających ciało bitywne koło osi  $z$ , czyli  
składowy moment sił względem  $z$ , równa się czasowej  
pochodnej momentu wycinkowego względem osi  $z$ .

Nadmienimy tu, że momenty sił względem osi:  $x, y, z$   
znakować będziemy literami:  $P, Q, R$ . Nazywamy je  
nieraz składowymi a względem na moment wypadkowy:  
 $\sum [x_k f_k]$ . Jeśli chodzić będzie o oznaczenie kątów przy obro-  
cie względem osi  $x, y, z$ , to oznakować je będziemy:  $\varphi, \psi, \chi$ .

Postaramy się teraz przekształcić prawą stronę owego  
równania ruchu przez wprowadzenie współrzędnych biegu-  
nowych. Uważajmy punkt  $P_k$  i kąt, jaki promień  $r_k$  zamy-

ka, z osią  $y$ , w górę zachowana,  $z$   $x_k$ . Podwójna prędkość wycinkowa, która w równaniu ruchu jest objęta nawiasem, porywa się:  $r_k^2 \frac{dx_k}{dt}$ . Po podstawieniu będzie:

$$R = \frac{d}{dt} \sum m_k r_k^2 \frac{dx_k}{dt}$$

Poprowadźmy teraz w ciele sztywnym dowolną prostą, która rąby się o ciałem jednakowo obracać i naznaczymy kąt, jaki ta prosta zamyka z  $x_k$  literą  $\alpha_k$ . Kąt ten będzie oczywiście stały. Będzie:

$$\chi_k = \alpha_k - \chi_0$$

$$\frac{d\chi_k}{dt} = \frac{d\alpha_k}{dt} - \frac{d\chi_0}{dt} \quad \text{czyli wobec } \frac{d\alpha_k}{dt} = 0$$

$$\frac{d\chi_k}{dt} = \frac{d\chi_0}{dt} \quad \text{i stąd}$$

$$R = \frac{d}{dt} \sum m_k r_k^2 \frac{d\chi_0}{dt}$$

Wyznając  $\frac{d\chi_0}{dt}$  jako niezależne od współrzędnych słomowa ma przed znak sumy i znacząc:  $\sum m_k r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) = K_2$ , dostajemy:

$$R = K_2 \frac{d^2\chi_0}{dt^2}$$

Lub opuszczając współczynniki, bo objęta jest rzeczka, którą prostą obierzemy za początek dostajemy:

$$R = K_2 \frac{d^2\chi}{dt^2}$$



$K_z$ , którego definicję mamy podaną powyższemi równaniami nazywamy momentem bezwładności. Równanie ostateczne powiada nam, że moment siły równa się iloczynowi z momentu bezwładności i przyspieszenia kątowego. Jest to powiedzenie analogiczne do określenia Newtonowskiego siły. W analogii tej: siłę odpowiada moment siły, masie odpowiada moment bezwładności, przyspieszenie odpowiada przyspieszenie kątowe. Zauważyć jednak trzeba, że moment bezwładności nie jest wielkością stałą, podobnie jak masa ciała, ale zmienia się na ogół ze zmianą osi obrotu.

Skutkiem analogii w określeniu momentu siły i siły są też zadania analogiczne. Dla przykładu rozwiążemy tu kilka.

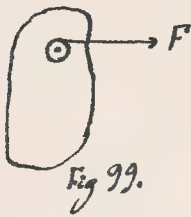
1. Na ciału sztywnym działa moment siły równy zero. Jaki ruch nastąpi? Jest oczywiście  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$  stąd

$$\theta = ct + \text{const}$$

tzn. ciało to wiruje koto osi ze stałą prędkością wycinkową.

2. Do ciała sztywnego przymocowany jest stały ciężarek

W sposób jak wskazuje Fig 99. Na krawiec nawinięta jest nitka,



za której statcznem ciągnięciem wprowadzimy ciało w ruch obrotowy. Jeśli promień krawca oznaczymy przez  $a$ , siłę zaś działającą przez  $F$ , to będzie:

$$R = Fa = K \frac{d^2\gamma}{dt^2}$$

$$\gamma = \frac{Fa}{K} \frac{t^2}{2} + \alpha t + \beta$$

ten. obrót ciała sztywnego będzie się odbywać ruchem jednostajnie przyspiesczonym.

3. Analogiczne zadanie jest, gdy zamiast siły wprowadzającej ciało w ruch działą siła hamująca. Pomysłmy sobie do powyższego krawca przyłożony hamulec. Siła tarcia, przyjmijmy, równa się iloczynowi z nacisku  $p$  i współczynnika tarcia  $\varepsilon$ . Ponieważ wpływ tarcia jest hamujący, zatem równanie różniczkowe ruchu będzie:

$$\varepsilon \cdot p \cdot a = -K \frac{d^2\gamma}{dt^2} \quad \text{skąd}$$

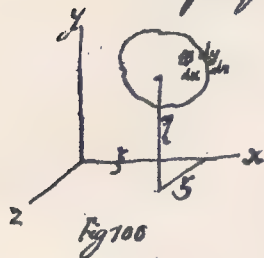
$$\gamma = - \frac{\varepsilon p a}{K} \frac{t^2}{2} + \alpha t + \beta$$

ten. ruch będzie jednostajnie opóźniony.

Obliczanie środka masy i momentu bezwładności. Za-  
tem przystąpimy do dalszej teorii ciała sztywnego, zdo-

my sobie sprawę ze sposobów obliczania środka masy i momentu bezwładności pojęć ważnych w dynamice ciał sztywnych..

Co się tyczy środka masy, to wychodzimy z definicji jego:



$$\xi = \frac{\sum mx}{\sum m}$$

$$\eta = \frac{\sum my}{\sum m}$$

$$\zeta = \frac{\sum mz}{\sum m}$$

Jeśli substancja wypełnia w sposób ciągły pewną objętość i jednorodnie tj jeśli gęstość  $\rho$  jest wszędzie jednakowa, to element masy:

$$dm = \rho \, dx \, dy \, dz$$

Sumowanie skończone możemy zastąpić przez całkowanie i dostaniemy przeto:

$$\xi = \frac{\iiint x \rho \, dx \, dy \, dz}{\iiint \rho \, dx \, dy \, dz}$$

$$\eta = \frac{\iiint y \rho \, dx \, dy \, dz}{\iiint \rho \, dx \, dy \, dz}$$

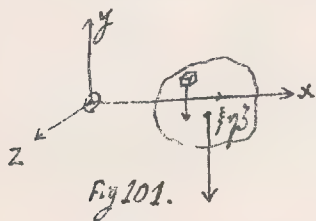
$$\zeta = \frac{\iiint z \rho \, dx \, dy \, dz}{\iiint \rho \, dx \, dy \, dz}$$

$\rho$  jako stałe łączy się. Wykonanie całek jest proste, jeśli kształt geometryczny bryły jest prosty. Postępujemy stowa:



nie możemy obliczyć środka masy pewnych linii, powierzchni, brył, wyobrażając sobie, że są one obłożone pewnymi masami elementarnymi w wszystkich swych punktach.

Jeżeli ciało znajduje się w polu grawitacyjnym np. na powierzchni ziemi, to środek masy nakrywa się ze środkiem ciężkości. Na każdy element masy ciała działa siła ciężkości proporcjonalna do masy tego elementu. Każda taka siła stara się obrócić



ciało około osi  $z$ , mają one bowiem wszystkie

jednakowy kierunek tj. pionowy. Moment pojedynczej siły tj. iloczyn  $x$  siły i ramienia jest:  $g p dx dy dz \cdot x$ . Wypadkowy zatem moment:

$$R = \sum g p dx dy dz \cdot x$$

$$= g \sum m x$$

czyli wobec definicji środka masy  $\xi = \frac{\sum m x}{\sum m}$

$$R = \xi \cdot g \sum m$$

czyli

$$R = \xi \cdot G$$

tj. ciało wypadkowa ciężkości  $G$  zaczepia w punkcie, którego spótwrzedna jest  $\xi$ . Analogicznie powiemy, że każda siła elementarna stara się obrócić ciało około osi  $x$ . Dostanie-

my stał:  $P = \int G$

Mamy więc określony rzut środka ciężkości na płaszczyznę  $xz$ , odpowiadający zupełnie definicyi środka masy. A ponieważ punkt przyłączenia można dowolnie przesunąć wzdłuż kierunku siły, więc można jako punkt zaczepienia obrać sam środek masy  $\{ \S 75 \}$ . Łatem istotnie środek masy nakrywa się z środkiem ciężkości, jeśli ciało znajduje się w polu grawitacyjnem przy założeniu, że siły są równoległe i mają jednakowy kierunek. Oczywiście nie będzie to zachodzić dla ciała na powierzchni ziemi, jeśli znajdujacego, jeśli uwzględnimy zmienność kierunku i natężenia ciężkości.

Co się tyczy momentu bezwładności, to wychodząc z definicyi wyżej podanej i zastępując sumowanie skończone przez całki dostaniemy:

$$K_z = \int \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz$$

$$K_x = \int \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$K_y = \int \iiint (x^2 + z^2) dx dy dz$$

Przykłady: 1. Obliczyć moment bezwładności masy liniowo rozmieszczonej względem osi prostopadłej przez koniec przeciętej. ( $\rho=1$ ). Będzie:

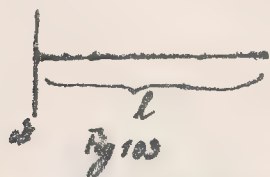


Fig 103

$$K = \int_0^l x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{l^3}{3}$$

2. Tak samo, gdy oś przez środek odcinka przeciętej:

$$K = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{l}{2}} = \frac{l^3}{12}$$

Zatem teraz moment bezwładności jest czwartą częścią poprzedniego.

3. Obliczyć moment bezwładności równoległokąta względem osi z przez krawędź przechodzącą.

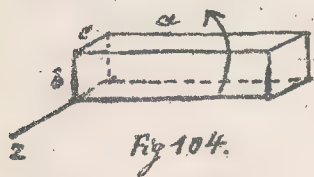


Fig 104.

$$K_2 = \iiint_0^{a,b,c} (x^2 + y^2) dx dy dz = \\ = \iiint_0^{a,b,c} x^2 dx dy dz + \iiint_0^{a,b,c} y^2 dx dy dz$$

Całkowania te są niezależne od siebie, zatem całka potrójna będzie iloczynem trzech całek.

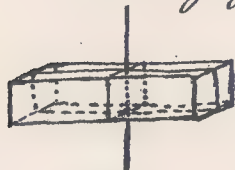
$$K_2 = \frac{a^3}{3} bc + a \frac{b^3}{3} c = \frac{abc}{3} (a^2 + b^2) = \frac{M}{3} (a^2 + b^2),$$

gdzie  $M$  oznacza masę całego równoległokąta ( $\rho=1$ ),  $a^2 + b^2$  przekątnie. Zatem moment bezwładności taki, jak



by trzecia część masy była skoncentrowana na końcu przekątnej.

4. Tak samo, gdy oś przez środek przechodzącej.



$$K_o = 4 \frac{\frac{M}{4} \left( \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right)}{3} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

Fig 105.

Znowu więc moment jest sztyry razy mniejszy niż poprzed.

5. Obliczyć moment bezwładności krążka względem osi przechodzącej prostopadle do płaszczyzny przez środek.

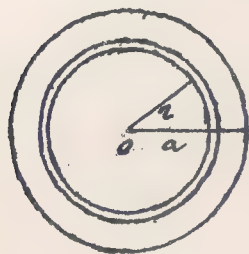


Fig 106

Das elementarny ma masę:  $2\pi r dr$ .

Zatem:

$$K = \int_0^a 2\pi r dr \cdot r^2 = \frac{2\pi a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{2} = \frac{M}{2} a^2$$

Podobnie obliczy się moment bezwładności krążka, gdy oś obrotu jest przechodząca przez jego płaszczyznę, dalej kuli, walców itd.

Twierdzenie Steinera. Jeśli rozważamy momenty bezwładności danego ciała względem różnych osi, przechodzących równolegle przez to ciało sytuowane, to dla każdej z nich moment bezwładności jest wogóle różny

Oznaczmy przez  $K_0$  moment bezwładności względem osi  $y$  przechodzącej przez środek masy.

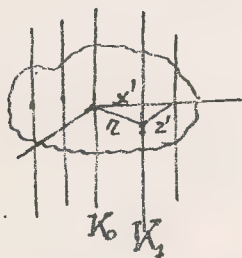


Fig 107.

$$K_0 = \sum m (x^2 + z^2)$$

Jeśli  $x'$  i  $z'$  określają nam inną os' równoległą do pierwszej, to moment bezwładności względem niej jest:

$$K_1 = \sum m [(x-x')^2 + (z-z')^2] =$$

$$= \sum m (x^2 + z^2) + \sum m (x'^2 + z'^2) - 2 \sum m x x' - 2 \sum m z z'.$$

$$= \sum m (x^2 + z^2) + (x'^2 + z'^2) \sum m - 2x' \sum m x - 2z' \sum m z$$

Lecz  $\sum m x = \sum m z = 0$ , bo powiedzieliśmy, że pierwsza os' obrotu, ze względu na którą  $x$  i  $z$  są brane, przechodzi przez środek masy. Z uwagi nadto, że  $x'^2 + z'^2 = r^2$ , jest

$$K_1 = K_0 + r^2 M$$

i to jest właśnie tw. Steiner'a o momentach bezwładności. Powiada ono, że najmniejszy moment bezwładności ciała, setyonego jest dla osi przechodzącej przez środek masy. Każdy inny z powodu, że  $r > 0$  i  $M > 0$  jest od niego większy.

Stosując tw. Steiner'a np. do przykładu 4. wyżej, mamy:

$$K = K_0 + M \frac{a^2 + b^2}{4}$$

Leż  $K_0 = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$ . Zatem  $K = M(a^2 + b^2)\{\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\} =$   
 $= \frac{M}{3}(a^2 + b^2)$ , co istotnie, jak wyżej widzieliśmy, zachodzi.

Jako przykład powyższych rozwiązań nad momentami inercji i środkiem masy rozpatrzmy:

Wahadło fizyczne. Nieruchomy tak dowolną być obracającą się koło osi, którą tu dla prostoty nazwijmy z. Po-



Fig 108.

prowadźmy w tym wahadle prostą, ze względu na którą będziemy rachowali wychylenia od pionu. Najprościej będzie jeśli ta prosta będzie przechodzić przez środek

masy S. To więc zrobimy. Za kierunek dodatni wychyłań uważamy ten, który jest oznaczony strzałką. Jaki ruch? W środku ciężkości zawieszona siła  $Mg$ . Ramię tej siły jest:  $l \sin \alpha$ . Zatem równanie różniczkowe ruchu jest:

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -Mg l \sin \alpha$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - \frac{Mg l}{K} \sin \alpha$$

Obie wychylenia małe upraszczają to równanie do:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - \frac{Mg l}{K} \alpha$$

Wzrost taki sam, jak już mieliśmy przy wahadle matma-



tycznem spotykaliśmy. Zatem rozwiązanie jest:

$$\chi = \chi_0 \sin(\alpha t + \varepsilon)$$

Sprawdzając, dostajemy:

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = -\chi_0 \alpha^2 \sin(\alpha t + \varepsilon)$$

Zatem:  $\alpha = \sqrt{\frac{Mgl}{K}}$ . Stąd dostajemy okres wzniesień.

Pozostamy  $\alpha T = 2\pi$ , to  $T = \frac{2\pi}{\alpha}$  czyli

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{Mgl}}$$

Według tw. Steinera:  $K = K_0 + l^2 M$ , jeśli  $K_0$  oznacza moment bezwładności wahadła względem osi  $z$  przechodzącej przez środek ciężkości zaś  $l$  oznacza odległość osi równoległej od tej  $z_0$ . Stąd

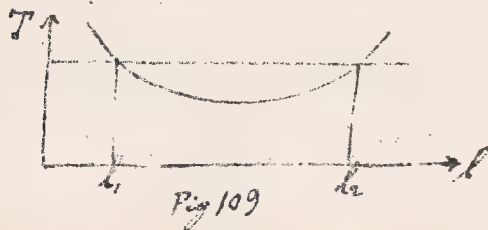
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K_0 + l^2 M}{Mgl}}$$

$l$  można zmieniać nie zmieniając  $K_0$  i  $M$ . Stąd okres  $T$  zależy od  $l$ .

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K_0}{Mgl} + \frac{l}{g}}$$

Dla  $\left. \begin{matrix} l=0 \\ l=\infty \end{matrix} \right\}$  okres  $T$  staje się nieskończenie duży

Gdybyśmy wzięli przedstawienia graficzne oferując na osie układu:  $T$  i  $l$ , dostalibyśmy krzywą tego rodzaju jak przedstawia Fig 107. Każdej wartości  $T$  odpowiada



dwie wartości na  $l$ . Wynika to bezpośrednio stąd, że równanie na  $T$  jest drugiego stopnia względem  $l$ . Mamy:

$$g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{K_0}{Ml} + l$$

$$l^2 - l g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = -\frac{K_0}{M}$$

$$l = \frac{g}{2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \pm \sqrt{\left[\frac{g}{2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\right]^2 - \frac{K_0}{M}}$$

Jeśli wartość na  $l$  ma być rzeczywista, to wyrażenie pod pierwiastkiem musi być nieujemne. Przyjmując, że jest dodatnie, dostaniemy dwie wartości na  $l$ :

$$l_1 = \frac{g}{2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 + \sqrt{\dots}$$

$$l_2 = \frac{g}{2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 - \sqrt{\dots}$$

$$l_1 + l_2 = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_1 + l_2}{g}}$$

Dostaliśmy więc na okres wahadła fizycznego wzór taki sam, jaki mamy na okres wahadła matematycznego o długości  $l_1 + l_2$ . Zwracając uwagę na to, że aby obliczyć okres  $T$  wahadła fizycznego, nie trzeba znać  $K$  i  $M$ , wystarczy znać tylko  $l_1$  i  $l_2$ . Przez to sprawa się ogromnie upraszcza, bo drogą rachunku obliczanie  $K$  nie może być dość dokładne, ponieważ w rzeczywistości fizyczne wahadła nie muszą być równe takowe do ujęcia

rachunkowego i zawsze przeciw kształt bryły nie będzie dokładnie rachunkiem oddany. Natomiast  $l_1$  i  $l_2$  drogą empiryczną, daleko łatwiej znaleźć. Na tem polega wahać rewersyjne wynalazione przez kapitana angielskiego Katera. Dla danego okresu  $T$  znajdują się dwie wartości  $l_1$  i  $l_2$  takie, iż wahać w nich zawieszone będzie mia-

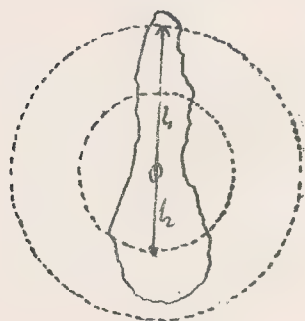


Fig. 110.

to właśnie ten okres. Może naturalnie się zdarzyć, że dla pewnego okresu nie znajdują się w danej bryle takie punkty, żeby wahać w nich zawieszone dawa-

ło zadany okres. Wystarczy wtedy dotrzeć do takiego wahać jakiegoś potężniejszego sztywnego i prędko można już osiągnąć ów okres.

Skuteczność wahać, jak wiadomo, do mierzenia czasu, oraz do oznaczania przyspieszenia ziemskiego  $g$ . Dla różnych miejsc na ziemi jest ono przyspieszenie różne. Dla szerokości geograficznej  $\varphi$ , zredukowane do poziomu morza:

$$g = 978.103 [1 + 0.0051177 \sin^2 \varphi] \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}$$

(wartość empiryczną). Największe jest  $g$  na biegunie ziemskim, bo odstęp od środka ziemi najkrótszy i nie działa siła odśrodkowa.

Dla  $\varphi = 45^\circ$ ,  $g = 980.606$ , długość wahać sekundowego wrgłenie



dwusekundowego wynosi  $l = 99.356 \text{ cm}$ . Zauważymy tu, że właściwie niekiedy wrywa się na okres wronu  $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  zamiast  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ . Należy zatem zawsze się upewnić, gdy się mówi o wahadle sekundowym, czy ma się na myśli wron pierwszy czy drugi. Wielkości  $g$  istnieją lokalne odchylenia nie tylko z powodu szerokości geograficznej i wysokości nad poziom morza w różnych miejscach, ale też i tego powodu, że masy wewnętrzne ziemi są rozłożone nieregularnie. Wykonał w tym względzie systematyczne badania major austriacki Sternecker. Wyniki są bardzo ciekawe. Ciężkość jest wielkością bardzo nieregularną. Przy porównaniu redukuje się ją do poziomu morza, co jest łatwe, przecież na podstawie teorii potencjału. Okazuje się, że w górach  $g$  jest mniejsze niż w dolinach. Powód tego nie jest jeszcze zadowalniająco wyjaśniony. Wzrostka ma to być z przyczyną, poglądu, że góry są cięższymi częściami ziemi podobnie jak lód na wodzie.

Rachunki powyższe ważne są pod zastrzeżeniem, że kąt  $\chi$  jest mały. Poprawkę uskutecznia się tak samo, jak przy wahadle matematycznym.

Gdyby się umieściło wahadło na osi pionowej, to oczywiście

wahnień nie będzie żadnych, gdy się jednak oś nieco nachyli, słabniemy wahadło, dla którego okres wahań oznaczy się tak samo jak poprzed. Wahadło takie nazywamy poziomowem. Zastosowanie ma ono w konstrukcyi seismografu.



Fig 111.

Moinalby jeszcze inne przykłady podać na zastosowanie momentu bezwładności K. np.: ruch torsyjny, w którym belka powieszona poziomo na nitce pionowej wykonuje wahnięcia.



Fig 112.

Sila sprężystości nitki równa jest tu sile torsyjnej; dalej zawieszenia bifilarne itd. Do rozwiązywania tego rodzaju zadań służy najlepiej zasada zachowania energii.

Energia ciała sztywnego obracającego się.

Energję kinetyczną punktu poruszającego się ruchem postępowym z prędkością  $v$ , określamy jak wiadomo iloczynem  $\frac{mv^2}{2}$ , systemu punktów, a więc i ciała sztywnego sumą iloczynów  $\sum_k \frac{m_k v_k^2}{2}$ . Analogicznie energję kinetyczną punktu obracającego z prędkością  $v = r \frac{d\varphi}{dt}$ ,



Fig 112

określamy jak wiadomo iloczynem  $\frac{mv^2}{2}$ , systemu punktów, a więc i ciała sztywnego sumą iloczynów  $\sum_k \frac{m_k v_k^2}{2}$ . Analogicznie energję kinetyczną punktu obracającego z prędkością  $v = r \frac{d\varphi}{dt}$ ,

określamy iloczynem:  $\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ , zaś energię kinetyczną ciała sztywnego obracającego się określamy sumą iloczynów:  $L = \frac{1}{2} \sum m_k r_k^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ . Kłóć zaś tego, że prędkość kątowna  $\frac{d\varphi}{dt}$  jest dla wszystkich punktów jednakoowa, możemy ją wyciąć przed znak sumy. Stąd

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sum_k m_k r_k^2 \quad \text{czyli}$$

$$L = \frac{1}{2} \omega^2 K,$$

gdzie  $\omega$  oznacza prędkość kątową wspólną dla wszystkich punktów ciała sztywnego,  $K$  moment bezwładności względem uważanej osi obrotu i różny naturalnie dla różnych osi na ogół.

Dla systemu punktów wyprowadziliśmy przy założeniu, że siły są potencjalne (str 119) zasadę zachowania energii mechanicznej:

$$L + U = \text{Const.}$$

Zasada ta będzie oczywiście przy tem danem założeniu i tutaj dla ciała sztywnego ważna. Gdy ciało obraca się pod wpływem ciężkości koło osi poziomej, to energię po-  
Mechanika Ark XL



kinetyczną oznacza się, tak jakby wszystkie sły były skoncentrowane w środku ciężkości:

$$U = -Mgl \cos \chi \quad (\text{analog: } U = -mgy).$$

Stosując zatem zasadę zachowania energii, mamy

$$\frac{1}{2} K \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 - Mgl \cos \chi = \text{Const}$$

równanie takie same jak przy wahadle matematycznym; gdy zróbinuakujemy, dostaniemy:

$$K \frac{d^2\chi}{dt^2} + Mgl \sin \chi \frac{d\chi}{dt} = 0 \quad \text{czyli}$$

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = - \frac{Mgl}{K} \sin \chi$$

Widzimy zarazem, że jest to najprostszą drogą do uzyskania równania rotacyjnego ruchu, gdy jest dana jedna tylko swoboda ruchu (tu po kole).

Elipsoida bezwładności. Mieliliśmy wyżej twierdzenie wyrażające zależność momentu bezwładności od przycięci różnych osi równoległych. Teraz zrozumiemy, że oś obrotu ma stale przechodzić przez pewien punkt\*) i może zmieniać tylko kierunek i zapytamy się o zależność momentu bezwładności od tak określonych przycięci osi. W tym celu wypiszemy z wyrażenia na

\*) Np. środek masy.

energie kinetyczną ciała sztywnego obracającego się koło dowolnej osi w przestrzeni:



Fig 113.

$$L = \frac{1}{2} K \omega^2 \quad \text{cyfry}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum m v_k^2$$

Rozpiszmy wyrażenie to. Weźmy (str 135), że prędkość wirowania:

$$v_k = [v_k] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{dp}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} =$$

$$= i \left( x_k \frac{dz}{dt} - z_k \frac{dy}{dt} \right) + j \left( x_k \frac{dy}{dt} - y_k \frac{dz}{dt} \right) + k \left( y_k \frac{dp}{dt} - x_k \frac{dy}{dt} \right),$$

przez co prędkość kątową  $\omega$  oraz jej składowe  $\frac{dp}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  są dla wszystkich punktów ciała sztywnego wspólne.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum m_k \left[ x_k \frac{dz}{dt} - z_k \frac{dy}{dt} \right]^2 + \left[ x_k \frac{dy}{dt} - y_k \frac{dz}{dt} \right]^2 + \left[ y_k \frac{dp}{dt} - x_k \frac{dy}{dt} \right]^2 \} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \sum m_k (z_k^2 + x_k^2) + \frac{1}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) - \\ &\quad - \frac{dp}{dt} \frac{dy}{dt} \sum m_k x_k y_k - \frac{dy}{dt} \frac{dz}{dt} \sum m_k y_k z_k - \frac{dz}{dt} \frac{dp}{dt} \sum m_k z_k x_k. \end{aligned}$$

Wprowadzając skrócenia:

$$\sum m_k (y_k^2 + z_k^2) = K_x$$

$$\sum m_k x_k y_k = D_{xy}$$

$$\sum m_k (z_k^2 + x_k^2) = K_y$$

$$\sum m_k y_k z_k = D_{yz}$$

$$\sum m_k (x_k^2 + y_k^2) = K_z$$

$$\sum m_k z_k x_k = D_{zx}$$

mamy:

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 K_x + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 K_y + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 K_z - \right. \\ \left. - 2 \frac{dp}{dt} \frac{dy}{dt} D_{xy} - 2 \frac{dy}{dt} \frac{dz}{dt} D_{yz} - 2 \frac{dz}{dt} \frac{dp}{dt} D_{zx} \right\}.$$

$K_x, K_y, K_z$  są to, jak wiemy, momenty bezwładności

ze względu na osie  $x, y, z$ ;  $D_{xy}, D_{yz}, D_{zx}$  nazywamy współwzrostów, które później podamy, momentami dwiacyjnymi.

Obracajmy ciało około różnych osi przez ten sam punkt przechodzących i nakreślmy na każdej z nich wektor prędkości i z jaką się ciało około każdej z tych osi, przy założeniu że energia  $L_0 = \text{const}$  jest stale jednakowa, obraca. Wyobraźmy sobie jedną z takich osi o kierunku:  $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ . Prędkość, z jaką ciało około tej osi wiruje, oznaczmy  $\omega = |\vec{\omega}|$ . Prędkości:  $\frac{dp}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  będą jej składowymi:

$$\frac{dp}{dt} = \omega \cos \lambda$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega \cos \mu$$

$$\frac{dz}{dt} = \omega \cos \nu$$

Będzie zatem:

$$L_0 = \frac{\omega^2}{2} \left\{ K_x \cos^2 \lambda + K_y \cos^2 \mu + K_z \cos^2 \nu - \right. \\ \left. - 2 D_{xy} \cos \lambda \cos \mu - 2 D_{yz} \cos \mu \cos \nu - 2 D_{zx} \cos \nu \cos \lambda \right\}$$



czyli wprowadzając skrócenia:  $\omega \cos i = \xi$ ,  $\omega \sin i \cos \mu = \eta$ ,  $\omega \sin i \sin \nu = \zeta$  mamy

$$L_0 = \frac{1}{2} \{ K_x \xi^2 + K_y \eta^2 + K_z \zeta^2 - 2 D_{xy} \xi \eta - 2 D_{yz} \eta \zeta - 2 D_{zx} \zeta \xi \}.$$

Analogiczne równanie dostaniemy dla każdej innej osi obrotu, przy czym  $K_x, K_y, \dots, D_{2x}, L_0$  są stałe, a dobieramy tylko  $\xi, \eta, \zeta$  tj owe prędkości  $\omega$ . Dostaliśmy tak równanie

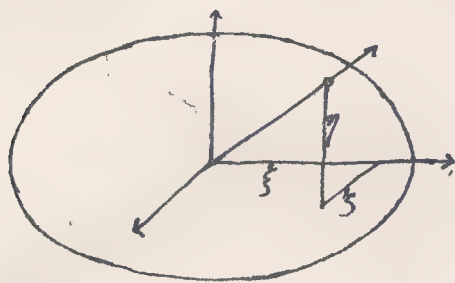


Fig 114.

stopnia drugiego o zmiennych  $\xi, \eta, \zeta$ . Punkty więc końcowe naszych wektorów prędkości nie będą leżeć na powierzchni stopnia drugiego. Lecz  $\xi, \eta, \zeta$  nigdy

nie mogą się stać nieskończonością, bo to jest wielkością skończoną, zatem powierzchnia uwaria na jest elipsoidą ze środkiem w punkcie tym, przez której wszystkie osie obrotu przechodzą. Jest to elipsoida bezwładności. Wiadomo z geometrii analitycznej, że elipsoida posiada trzy osie symetrii prostopadłe do siebie i że równanie jej do tych osi sprowadzone upraszcza się. Znacząc momenty bezwładności:  $A, B, C$  i współrzędne względem osi głównych:  $p, q, r$  dostajemy uproszczone równanie elipsoidy bezwładności (odniesione do osi głównych):

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{Const.}$$

Winnę formę można napisać to równanie:

$$\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 + \left(\frac{r}{c}\right)^2 = 1$$

gdzie:  $a, b, c$  oznaczają półosi główne. Stąd

$$a \sim \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad b \sim \frac{1}{\sqrt{B}}, \quad c \sim \frac{1}{\sqrt{C}}$$

Bez względu na wartość zależy od obranej jednostki. Możemy więc stąd, że można wprost, drogą konstrukcyjną, oznaczyć moment bezwładności ciała sztywnego dla danej osi. Mając bowiem elipsoidę bezwładności, wystarczy w danym kierunku nakreślić promień ze środka jej osi do przecięcia się z powierzchnią elipsoidy. Będzie to predkość  $\omega$ . Ponieważ zachodzi oczywiście proporcja: np.

$$\frac{K}{B} = \frac{b^2}{\omega^2}$$

zatem przy znanych;  $B, b, \omega$  mamy też oznaczony moment bezwładności  $K$  ze względu na powyższą oś obrotu.

Można też moment bezwładności  $K$  wyrachować za pomocą:  $\xi, \eta, \zeta$ , gdy znane są momenty  $K_x, K_y, K_z$  i  $D_{xy}, D_{yz}, D_{zx}$ , lub za pomocą  $p, q, r$ , gdy znane są  $A, B, C$ .

Dostaliśmy do elipsoidy bezwładności postępując z energią kinetyczną. Można też dojść do tego samego bezpośrednio wychodząc z określenia momentu bezwładności dla jakiegoś osi  $np_1$  o kierunku  $l, \mu, \nu$ :

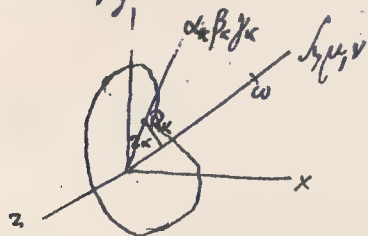


Fig 115.

$$K = \sum m_k R_k^2$$

Skoro:  $R_k = r_k \sin \vartheta_k$ , zatem

$$K = \sum m_k r_k^2 (1 - \cos^2 \vartheta_k),$$

gdzie  $\cos \vartheta_k = \cos l \cos \alpha_k + \cos \mu \cos \beta_k + \cos \nu \cos \gamma_k$ .

czyli z uwagi, że:  $r_k \cos \vartheta = x_k \cos l + y_k \cos \mu + z_k \cos \nu$ ,

$$K = \sum m_k \left[ (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - (x_k^2 \cos^2 l + y_k^2 \cos^2 \mu + z_k^2 \cos^2 \nu + 2x_k y_k \cos l \cos \mu + 2x_k z_k \cos l \cos \nu + 2y_k z_k \cos \mu \cos \nu) \right]$$

Pierwszy składnik nawiasu [ ] pomnożymy przez:  $\cos^2 l + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$  i uporządkujemy. Będzie:

$$K = \cos^2 l \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) + \cos^2 \mu \sum m_k (z_k^2 + x_k^2) + \cos^2 \nu \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) - 2 \cos l \cos \mu \sum m_k x_k y_k - 2 \cos l \cos \nu \sum m_k x_k z_k - 2 \cos \mu \cos \nu \sum m_k y_k z_k,$$

czyli wprowadzając skrócenia, mamy:

$$K = K_x \cos^2 l + K_y \cos^2 \mu + K_z \cos^2 \nu - 2 D_{xy} \cos l \cos \mu - 2 D_{yz} \cos \mu \cos \nu - 2 D_{zx} \cos \nu \cos l.$$

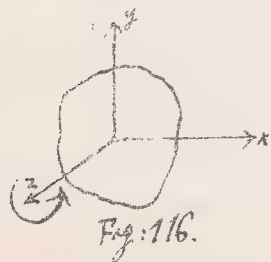
Dostaliśmy więc wzór na moment bezwładności względem osi



o kierunku  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ . Postępując dalej tak samo jak przedtem, a więc odcinając na krzywej  $\alpha$  takich osi przez punkt obrotu przechodzącej przódki wirowania  $\omega = \frac{\text{Const}}{\sqrt{K}}$ , dostajemy znowu elipsoidę bezwładności.

W szczególności elipsoida bezwładności przechodzi w kulę. Wtedy krzywy moment bezwładności wskutek symetrii ciała jest jednakowy. Dzieje się to np. dla kostki, kuli, wirującej około osi przechodzącej przez jej środek. Może też elipsoida bezwładności być obrotową tj. o dwóch osiach głównych jednakowych; trzecia może być dowolna. Zachodzi to np. dla walca, graniastostupa czwor-, sześciocionnego. W ogólności jednak dla ciał sztywnych niesymetrycznie względem uwanianego kierunku osi obrotu ułożonych wszystkie trzy osie elipsoidy bezwładności są różne.

Momenty dewiacyjne. Aby określić znaczenie momentów dewiacyjnych:  $D_{xy}, D_{yz}, D_{zx}$ , uważajmy ciało sztywne obracające się np. koło osi  $z$  w kierunku strzałki. Momenty sił względem osi  $z, x, y$  wyrażają



się, jak wiemy:

$$R = \sum (xY - yX) = \sum m_k \left( x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum m_k \left( x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt} \right)$$

$$P = \frac{d}{dt} \sum m_k \left( y_k \frac{dz_k}{dt} - z_k \frac{dy_k}{dt} \right)$$

$$Q = \frac{d}{dt} \sum m_k \left( z_k \frac{dx_k}{dt} - x_k \frac{dz_k}{dt} \right)$$

Wyrażenia te w uważanym wypadku uprościwszy, gdyż zwozimy co przedstawiają  $\frac{dx_k}{dt}$ ,  $\frac{dy_k}{dt}$ ,  $\frac{dz_k}{dt}$ . Prędkości wirowania w ogólnym wypadku jest:

$$\omega_k = [\dot{x}_k \dot{y}_k \dot{z}_k] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{dx_k}{dt} & \frac{dy_k}{dt} & \frac{dz_k}{dt} \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}$$

Składowe jej zatem:

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \cancel{z_k \frac{dy_k}{dt}} - y_k \frac{dz_k}{dt}$$

$$\frac{d\omega_y}{dt} = x_k \frac{dz_k}{dt} - \cancel{z_k \frac{dx_k}{dt}}$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \cancel{y_k \frac{dx_k}{dt}} - \cancel{x_k \frac{dy_k}{dt}}$$

Ponieważ jednak ciało, jak zakładamy, wiruje koło osi z, zatem  $\frac{dy_k}{dt} = \frac{dx_k}{dt} = 0$ , i stąd zostają w wyrażeniach tylko składniki nieprzekreślone i stąd momenty sił będą:

$$R = \frac{d}{dt} \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) \frac{dz_k}{dt}$$

$$P = - \frac{d}{dt} \sum m_k x_k z_k \frac{dz_k}{dt}$$

$$Q = - \frac{d}{dt} \sum m_k y_k z_k \frac{dz_k}{dt}$$

Znowu do tego samego można dojść bezpośrednio. Z rycin  
wprost widać, że

$$\frac{dy_k}{dt} = r_k \frac{d\chi}{dt} \cos \varphi = x_k \frac{d\chi}{dt}, \text{ a więc}$$

$$P = -\frac{d}{dt} \sum m_k x_k z_k \frac{d\chi}{dt} \text{ itd.}$$

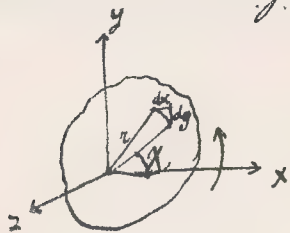


Fig 117.

$$\text{Lecy } \frac{d}{dt} (x_k z_k \frac{d\chi}{dt}) = \frac{dx_k}{dt} z_k \frac{d\chi}{dt} + x_k z_k \frac{d^2\chi}{dt^2} =$$

$$= -y_k z_k \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + x_k z_k \frac{d^2\chi}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt} (y_k z_k \frac{d\chi}{dt}) = \frac{dy_k}{dt} z_k \frac{d\chi}{dt} + y_k z_k \frac{d^2\chi}{dt^2} = x_k z_k \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + y_k z_k \frac{d^2\chi}{dt^2}$$

Wstawiając te wartości, dostajemy:

$$R = K_z \frac{d^2\chi}{dt^2}$$

$$P = + \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 D_{yz} - \frac{d^2\chi}{dt^2} D_{xz}$$

$$Q = - \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 D_{xz} - \frac{d^2\chi}{dt^2} D_{yz}$$

Widzimy stąd, że aby utrzymać oś obrotu z w kierunku niezmiennym trzeba wywierać pewne momenty (siły). Wielkość tych momentów zależy właśnie od momentów dwoiacyjnych. Te ostatnie mają związek z asymetrią

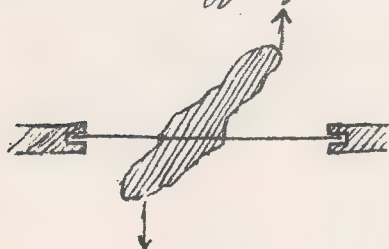


Fig 118.

nością ciała względem osi wirowania. W czasie ruchu bowiem powstają siły odśrodkowe, które starają się oś wychylić. Jeżeli ciało jest symetrycznie rozłożone względem osi obrotu, (oś

to jest symetrycznie rozłożone względem osi obrotu, (oś



wirowania musi wtedy przechodzić przez środek masy, to elipsoida bezwładności jest wtedy obrotowa i momenty dewiacyjne znikają. Rozumiemy więc stąd związek, jaki zachodzi między permanencyą wirowania ciała sztywnego a osią, około której ciało się obraca bez wywierania osobnych w tym celu sił. Zachodzi tu pewna analogia ze stanem równowagi statycznej.

Jeszczeby nam zostawała sprawa obliczania momentów dewiacyjnych. Muszą się one obliczyć z momentów bezwładności tj. muszą się dać wyrazić przez współczynniki elipsoidy, bo gdy tę ostatnią sprowadzimy do osi głównych, to one znikają. Można to jednak uskutecznić bezpośrednio z definicji. Weźmy np. że:

$$D_{xy} = \sum m_k x_k y_k$$

Stosując znany wzór transformacyjny:

$$x = \xi \cos(\xi x) + \eta \cos(\eta x) + \zeta \cos(\zeta x)$$

$$y = \xi \cos(\xi y) + \eta \cos(\eta y) + \zeta \cos(\zeta y)$$

mamy:

$$D_{xy} = \cos \xi x \cos \xi y \sum \xi^2 m + \cos \eta x \cos \eta y \sum m \eta^2 + \cos \xi x \cos \zeta y \sum m \xi \zeta + \\ + (\cos \xi x \cos \eta y + \cos \eta x \cos \xi y) \sum m \xi \eta + (\cos \eta x \cos \zeta y + \cos \eta y \cos \zeta x) \sum m \eta \zeta +$$

$$+(\cos \xi x \cos \xi y + \cos \xi y \cos \eta x) \sum m \xi \zeta.$$

Zauważymy tu natychmiast, że w myśl określenia:

$\sum m \xi \eta = D_{\xi \eta} = 0$ ,  $\sum m \eta \zeta = D_{\eta \zeta} = 0$ ,  $\sum m \xi \zeta = D_{\xi \zeta} = 0$ ,  
bo momenty dwiacyjne dla elipsoidy bezwładności  
o osiach głównych znikają. Biorąc, że  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \rho^2$ , możemy to co zostaje napisać tak:

$$\begin{aligned} D_{xy} &= \cos \xi x \cos \xi y \sum m [\rho^2 - (\eta^2 + \zeta^2)] + \cos \eta x \cos \eta y \sum m [\rho^2 - (\xi^2 + \zeta^2)] \\ &\quad + \cos \xi x \cos \xi y \sum m [\rho^2 - (\xi^2 + \eta^2)] \\ &= (\cos \xi x \cos \xi y + \cos \eta x \cos \eta y + \cos \xi x \cos \xi y) \sum m \rho^2 - \\ &\quad - \cos \xi x \cos \xi y \sum m (\eta^2 + \zeta^2) - \cos \eta x \cos \eta y \sum m (\xi^2 + \zeta^2) - \\ &\quad - \cos \xi x \cos \xi y \sum m (\xi^2 + \eta^2). \end{aligned}$$

Lecz współczynnik przy  $\sum m \rho^2$  znika, bo oznacza on  $\cos(x y) = 0$ . Inne sumy oznaczają nam znowu momenty bezwładności ze względu na osie główne elipsoidy. Jest więc istotnie:

$$-D_{xy} = A \cos \xi x \cos \xi y + B \cos \eta x \cos \eta y + C \cos \xi x \cos \xi y$$

czyli moment dwiacyjny wyraża się przez współczynniki elipsoidy bezwładności. Oczywiście tak samo

wyrazi się:  $-D_{yz}, -D_{zx}$

Strona mechaniczna ruchów obrotowych. Wogólnym wypadku, gdy jakieś ciało wiruje koło jakiejś osi, to moment siły  $P$  wyrazi się:

$$P = \sum (yZ - zY) = \frac{d}{dt} \sum m(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}) = \frac{d}{dt} \sum m r^2 \frac{d\varphi}{dt} \\ = \frac{d}{dt} \sum m (y^2 + z^2) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} (K_x \frac{d\varphi}{dt}).$$

Analogicznie wyrazić się momenty  $Q$  i  $R$ . Zatem

$$P = \frac{d}{dt} (K_x \frac{d\varphi}{dt})$$

$$Q = \frac{d}{dt} (K_y \frac{d\psi}{dt})$$

$$R = \frac{d}{dt} (K_z \frac{d\chi}{dt}),$$

gdzie więc  $P, Q, R$  oznaczają momenty sił składowe w kierunku osi układu prostokątnego  $x, y, z$ ;  $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\chi}{dt}$  składowe prędkości wirowania koło tychże osi;  $K_x, K_y, K_z$  składowe momenty bezwładności. Zauważymy, że należy ściśle odróżniać te uwarżane momenty od momentów, takimiż samemi nazwami literami oznaczanych, o których mówiliśmy przy elipsoidzie bezwładności i które tam występują jako współczynniki stałe, bo tam układ  $x, y, z$  był umocowany w ciele, a uwarżaliśmy sobie kierunki osi wirowania. Uwarżane tu momenty bez-



właściwości są na ogół z czasem zmiennie, ponieważ oryentalność ciała względem układu  $xyz$  się zmienia.

Najprostszą postać przyjmują te równania w wypadku, gdy elipsoida bezwładności jest kulą, bo wtedy  $K_x = K_y = K_z = K$ , a więc:

$$\frac{d}{dt}(K \frac{d\varphi}{dt}) = P$$

$$\frac{d}{dt}(K \frac{d\psi}{dt}) = Q$$

$$\frac{d}{dt}(K \frac{d\chi}{dt}) = R$$

[Specjalne zastosowania tych równań, a nawet poprzednich ogólniejszych, mieliśmy już nieraz przedtem. Łatwo dałoby tam z reguły, że ciało wiruje np. tylko koło osi  $z$ . Wtedy oczywiście moment bezwładności był  $K_z$  niezmienny w czasie,  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} = 0$  i równanie było:

$$K_z \frac{d^2\chi}{dt^2} = R$$

(analogon do  $m \frac{d^2x}{dt^2} = X$ ).

Dla naszych celów załóżmy, że elipsoida bezwładności jest kulą i że ciało wiruje początkowo koło osi

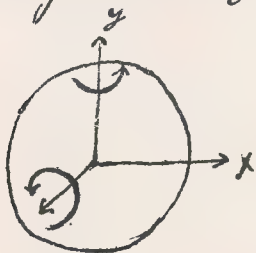


Fig. 119.

$y$  z prędkością  $\frac{dy}{dt} = w$  w kierunku strzałki; natomiast  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} = 0$ .

Nie powstaną tu żadne momenty

dewiacyjne i przeto os' obrotu bedzie porostawac' w tych warunkach niezmiennosc, przechodzac przez srodek masy ciata. Srodek ten, poniewaz chcemy brac' tylko pod uwage ruchy wirowe, mozemy przedstawic' sobie w jakowys' sposob w przestrzeni utwierdzonej. Nac stan pocrathowy ciata bedzie scharakteryzowany rownaniami:

$$K \frac{d^2\theta}{dt^2} = P = 0$$

$$K \frac{d^2\psi}{dt^2} = Q = 0$$

$$K \frac{d^2\chi}{dt^2} = R = 0$$

Na to ciato tak wirujace wywierzmy pewien moment przez krótki czas  $\tau$ , tak by ciato wirowalo np. koło osi  $z$ . Drugi ten stan scharakteryzowany bedzie rownaniami:

$$K \frac{d^2\theta}{dt^2} = P = 0$$

$$K \frac{d^2\psi}{dt^2} = Q = 0$$

$$K \frac{d^2\chi}{dt^2} = R$$

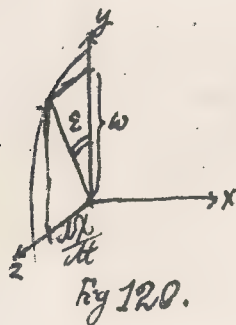
Zapytamy się, jaka jest konicowa wartosc' tej operacji. O to ciato nabierze pewnej predkosci wirowania koło osi  $z$ . Mamy

$$K \frac{d\chi}{dt} = \int R dt = R\tau$$

Stad zatem:  $\frac{d\chi}{dt} = \frac{R\tau}{K}$ . Inne predkosci zostaly niezmiennosc, a wiec:  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ,  $\frac{d\psi}{dt} = 0$ .

Gdy weźmiemy pod uwagę jakiś element tego ciała, to ruch jaki on wykonuje jest taki: porusza się on naprzód np. wzdłuż osi  $x$ , a potem zwróci się on nagle w kierunku innym zbliżając się np. ku osi  $z$ .

W pierwszym stadium ruchu os' nie zmieniała swego kierunku. Skoro jednak wywarliśmy nacisk, to ponieważ nie jest ona umocowana, kierunek jej się zmieni. Można z łatwością oznaczyć kąt, jaki ta os' zamyka ze swym kierunkiem poprzednim. Odetniemy



na osi  $y$  prędkość  $\omega$ , na osi  $z$  prędkość  $\frac{dx}{dt} = \frac{R\tau}{K}$ . Ponieważ  $\frac{dy}{dt} = 0$ , więc os' w tem nowem położeniu będzie leżała na płaszczyźnie  $yz$ . Jasną więc jest rzecz, że będzie:

$$\tan \varepsilon = \frac{\frac{dx}{dt}}{\omega} = \frac{\frac{R\tau}{K}}{\omega}$$

Chcieliśmy naszym naciskiem os' niejako odprchnąć a ona tymczasem zbliżyła się ku nam. Z ostatniego rozumowania wynika też natychmiast, że im szybciej ciało wiruje koło osi  $y$ , tem mniej się wychyli przy wywarciu nacisku. Znane jest to popularnie pod nazwą:

Mechanika

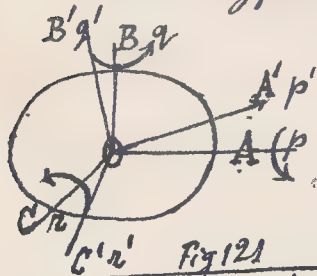


zachowania się wirowania. Tożsamość przy tym samym nacisku na ciało a dobranej prędkości  $\omega$ , też może się stać dowolnie małą.

To cośmy powiedzieli dla elipsoidy bezwładności zdegenerowanej w kulę można zastosować ogólnie dla elipsoidy trójosiowej tylko tu trzeba rozważyć trzy momenty. Jeszcze do tego wrócimy przy teorii Poincaré'a i tam sobie bliżej z tego zdamy sprawę.

Równania Eulera. Dotychczas zdawaliśmy sobie sprawę z ruchu ciała sztywnego około stałego punktu na podstawie elipsoidy bezwładności. W sposób geometryczny możemy na podstawie tego określić wielkość momentu bezwładności dla suwającej się osi, ale przebiegu prędkości stąd wywnioskować nie można. Do tego służą równania Eulera.

W celu wyprowadzenia tych równań, urozważmy elipsoidę bezwładności o momentach głównych  $A, B, C$ , a prędkościach wirowania około osi



głównych  $p = \frac{dp}{dt}$ ,  $q = \frac{dq}{dt}$ ,  $r = \frac{dr}{dt}$ . Po upływie bardzo krótkiego czasu  $t'$  niech moment  $A$  zmieni kierunek w  $A'$  (wielkość bezwzględna  $A$  zostaje taka sama). Moment wycinkowy dla tej nowej pozycji będzie  $A p'$ . Na osi zatem dawnej przypadnie z niego  $A p' \cos \angle A'OA$ .

Kierunek osi  $B$  przejdzie w tym samym czasie na  $B'$ , a stąd na osi uwzględnionej pierwotnej przypadnie moment wycinkowy  $B q' \cos \angle B'OA$ .

Analogicznie stanie się z momentem  $C$  i na uwzględnionej osi przypadnie  $C r' \cos \angle C'OA$ .

Stąd dostajemy na przyrost momentu wycinkowego w tym krótkim czasie  $t'$  w kierunku osi  $A$ :

$$A p' \cos \angle A'OA + B q' \cos \angle B'OA + C r' \cos \angle C'OA - A p = P_a dt$$

Aby otrzymać równanie Eulera wystarczy ten wzór jeszcze nieco przekształcić. W tym celu założymy koło punktu  $O$  kulę o promieniu  $= 1$  i oznaczymy na niej punkty, w których osie kolejno przecinają jej powierzchnię,  $A, A'$ . Łuk

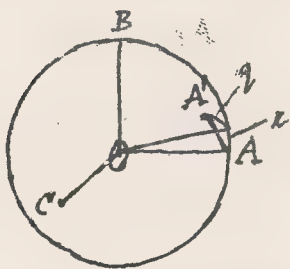


Fig. 122.

$AA'$  zakreślony w tym krótkim czasie  $t$  oznaczac będzie prędkość, której składowe są  $r$  i  $q$ . Stąd  $\angle A'OA = dt \cdot \sqrt{q^2 + r^2}$ . Łatem przy założeniu, że kąty są bardzo małe, dostaniemy:

$$\cos A'OA = 1 - \frac{q^2 + r^2}{2} dt^2.$$

Kąt  $BOA$  wynoszący  $\frac{\pi}{2}$  przeszedł w tym krótkim czasie na kąt  $B'OA$ . Wzrost on skutkiem obrotu koła ośi  $z$  o łuk elementarny  $r dt$ . Łatem

$$\cos B'OA = \cos\left(\frac{\pi}{2} + r dt\right) = -\sin(r dt) = -r dt$$

Analogicznie  $\angle COA$  przeszedł w tym krótkim czasie na  $\angle C'OA$ . Zmniejszył się on, ale to tylko skutkiem obrotu o koło ośi  $y$ . Łatem

$$\cos C'OA = \cos\left(\frac{\pi}{2} - q dt\right) = \sin(q dt) = q dt.$$

Prędkości  $p, q, r$  przeszły w tymże czasie na  $p' = p + dp$ ,  $q' = q + dq$ ,  $r' = r + dr$ . Wzór tedy poprzedni powtórzeniu tych wartości przejdzie na:

$$A\left(p + \frac{dp}{dt} dt\right)\left(1 - \frac{q^2 + r^2}{2} dt^2\right) - B\left(q + \frac{dq}{dt} dt\right)r dt + \\ + C\left(r + \frac{dr}{dt} dt\right)q dt - Ap = P_2 dt.$$

Wykonując naznaczone tu mnożenia i opuszczając wielkości wyższego rzędu w porównaniu z pierwszym



dostajemy równanie wypadkowe:

$$A \frac{dp}{dt} + (C-B) qz = P_a$$

Gdyby w tem równaniu składnik drugi po lewej stronie odpadł, to nie mielibyśmy w nim nic innego, jak już nieraz używane przez nas równanie

$$K_x \frac{d^2\theta}{dt^2} = P$$

zachodzące dla ruchu obrotowego wylączenie koło osi  $x$ . Ponieważ jednak przez nas obecnie rozpatrywany ruch obrotowy nie odbywa się koło jednej specjalnej osi, lecz koło osi zmiennej takiej, żeby momenty bezwładności  $A, B, C$  zmieniały swe kierunki, a zachowały tylko wielkość bezwzględna taką samą, więc to jest uwzględnione przez składnik drugi:

Przez prostą zmianę znaków dostajemy dalsze równania:

$$B \frac{dq}{dt} + (A-C) zp = Q_b$$

$$C \frac{dz}{dt} + (B-A) pq = R_c$$

System ten równań jest 1<sup>o</sup> rzędu ze względu na prędkości wirowania  $p, q, z$  i stąd dogodny do cał-

kowania. Aby dostać ruch, trzeba wprowadzić jeszcze raz całkować, ale owe całkowania są przynajmniej rozdzielone na dwa etapy.

Zastosowanie równań Eulera. Zastosować możemy równania dopiero co wyprowadzone, do zdania sobie sprawy z tego, jak się będzie zachowywać ciało, samo sobie porzucone, gdy na nie nie będą działać żadne siły zewnętrzne. Równania Eulera upraszczają się w tym razie, bo  $P_a = Q_b = R_c = 0$ . Będzie więc:

$$\begin{array}{l|l|l} A \frac{dp}{dt} + (C-B)qr = 0 & p & A_p \\ B \frac{dq}{dt} + (A-C)rp = 0 & q & B_q \\ C \frac{dr}{dt} + (B-A)pq = 0 & r & C_r \end{array}$$

Mnożąc ten system równań przez:  $p, q, r$  dostajemy:

$$Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = 0,$$

którego całka jest

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.}$$

Równanie to można było z góry przewidzieć; wyraża ono bowiem zachowanie energii kinetycznej. Już dawno wi-  
widzieliśmy, że energia kinetyczna ciała sztywnego wi-

rującego, o momencie bezwładności ze względu na daną os'  $K$  a o prędkości kątowej w wyraża się:  $L = \frac{1}{2} K \omega^2$ . Otar lewa strona wyraża właśnie podwójną energię kinetyczną i napiszemy zatem:

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 = 2E$$

Pomnożymy teraz system równań Eulera przez  $A p$ ,  $B q$ ,  $C r$  i dodajmy te równania znnowu, to dostaniemy:

$$A^2 p \frac{dp}{dt} + B^2 q \frac{dq}{dt} + C^2 r \frac{dr}{dt} = 0$$

Znowu całka tego równania, jak widzimy bezpośrednio, jest:

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = G^2 \text{ (stała)}$$

Co to równanie oznacza? Możemy  $A p$ ,  $B q$ ,  $C r$  są momentami wycinkowymi. Równanie więc to powiada, że wypadkowy moment wycinkowy jest stały, co do swej wartości bezwzględnej. Z tego, że równanie to jest równoważne następującemu:

$$(i A p + j B q + k C r)^2 = (G)^2$$

gdzie już wchodzą wektory, wnosimy, że również co do kierunku zostaje moment wycinkowy wypadkowy



niezmienny w czasie. Umyślając to geometrycznie powiećlibysmy: suma wszystkich rantów pól na jakas płaszczyznę, jakie zakreslają wektory wszystkich punktów ciała, poprowadzone z dowolnego punktu jako początku (np. ze środka masy) jest wielkością niezmienną, o ile na ciało nie działają siły zewnętrzne; również wektor  $\mathbf{N}$  przedstawiający moment wypadkowy wypadkowy niezmienną się w czasie. Również więc i wnioski z drugiego równania wyprowadzane były z góry do przewidzenia.

W dalszych już rozważaniach wyprowadzimy teoremy Poinsota. Zauważymy, że oba rozważone wyżej równania:

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 = 2E$$

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = G^2$$

przedstawiają elipsoidy o wspólnym środku. Pierwsze z nich przedstawia elipsoidę bezwzględności. Chcąc ją sprowadzić do formy:

$$A \xi^2 + B \eta^2 + C \zeta^2 = 1$$

wystarczy całe tanto równanie podzielić przez  $2E$ , aby

wyniknie:  $\xi = \frac{p}{\sqrt{2E}}$ , ... czyli  $p = \xi \sqrt{2E}$ ,  $q = \eta \sqrt{2E}$ ,  $r = \zeta \sqrt{2E}$ .

Wypadkowa prędkość wirowania  $\omega = p \sqrt{2E}$ .

Obie uwazane elipsoidy spójnione są równocześnie przez te same współrzędne  $p, q, r$ , a że mają różne wymiary więc muszą się przecinać. Linię wspólnego środka obu elipsoid z punktami kra-

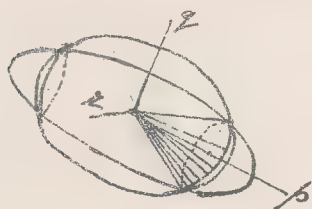


Fig. 123

wej przecięcia zakreślać będzie stożek, na którego pobocznicę pozostawać będzie stale oś wirowania ciała swobodna.

Aby sprawę jeszcze jaśniej przedstawić podzielimy równanie elipsoidy bezwzględności przez tanto drugie wyciągając zeń drugi pierwiastek. Będzie

$$p \cdot \frac{Ap}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}} + q \frac{Bq}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}} + r \frac{Cr}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}} = \frac{2E}{g}$$

Jak można to równanie interpretować? Spółczynniki

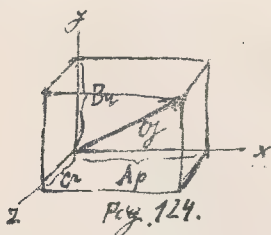


Fig. 124.

przy  $p, q, r$  mają kształt cosinów nachylenia. Jeśli bowiem na oś układu odetniemy sobie momenty

wycinkowe  $Ap, Bq, Cr$  i zdołamy je w wypadkowy

moment wycinkowy  $\mathcal{M}$ , to mamy:

$$\frac{Ap}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}} = \frac{Ap}{\mathcal{M}} = \cos(p\hat{g}), \quad \frac{Bq}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}} = \cos(q\hat{g}), \quad \frac{Cr}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}} = \cos(r\hat{g}).$$

Jeśli jednak w oznaczą nam wypadkową prędkość wirowania, to mamy też równości:

$$p = \omega \cos(\omega\hat{p}), \quad q = \omega \cos(\omega\hat{q}), \quad r = \omega \cos(\omega\hat{r})$$

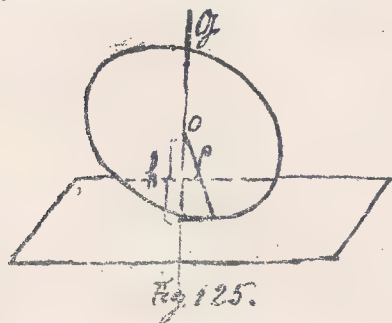
Wstawiając te oznaczenia w nasze równanie, doprowadzimy je do formy:

$$\omega \underbrace{\{ \cos(\omega\hat{p}) \cos(p\hat{g}) + \cos(\omega\hat{q}) \cos(q\hat{g}) + \cos(\omega\hat{r}) \cos(r\hat{g}) \}}_{\cos(\omega\hat{g})} = \text{const}$$

czyli

$$\omega \cos(\omega\hat{g}) = \text{const.}$$

Prędkość wirowania  $\omega$  wyraża się, jak wiemy w elipsoidzie bezwładności,  $\omega = \rho \sqrt{2E}$  (gdzie  $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ ).



zatem

$$\rho \cos(\omega\hat{g}) = \frac{\text{const}}{\sqrt{2E}} = \text{const.}$$

Je zaś kierunek  $g$  jest niezmienny w czasie, więc to równanie

powiada, że rzut odcinka  $\rho$  na kierunek  $g$ , mierzimy ten rzut  $h$ , jest wielkością stałą:  $h = \text{const.}$



§ może zmieniać swoje wartości, ale zmienia je zawsze tak, iż punkt jego końcowy leży zawsze na płaszczyźnie, normalnej do  $U$  w niezmiennym odstępie  $h$  od środka  $O$  się znajdującą. Równanie takiej płaszczyzny jest:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - h = 0$$

gdzie  $h$  ma znaczenie powyższe, zaś  $\alpha, \beta, \gamma$  oznaczają kąty zawarte między osiami a kierunkiem  $h$ . Lecz osie mają u nas kierunki osi głównych elipsoidy, zatem równanie tej płaszczyzny jest:

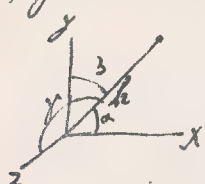


Fig 126.

$$x \frac{Ap}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cz^2}} + y \frac{Bq}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cz^2}} + z \frac{Cz}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cz^2}} - h = 0$$

Powiadamy, że równanie to jest warunkiem równaniem stycznej płaszczyzny do elipsoidy bezwzględności. Jak się o tem przekonać? Oto każemy, że zachodzi równanie elipsoidy:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cz^2 = 2E$$

i znajdziemy równanie płaszczyzny stycznej do tej elipsoidy. Jeśli to równanie będzie identyczne z równaniem płaszczyzny poprzedniej, to twierdzenie nasze będzie udowodnione. Lecz równanie stycznej płaszczyzny do elipsoidy z punktem styczności  $p, q, z$



kania się zewnętrznych odbywa się tak, że stożek polhodyowy odwołuje się na stożku herpolhodyowym.

Na podstawie tego można już sobie zdać sprawę ze stałości osi obrotu. Można tu rozróżnić trzy wypadki, zależnie od tego czy ruch ciała przed poruszeniem swobodnem odbywał się koło osi w bliskości osi największej, najmniejszej, średniej pomiędzy brzo-  
ma osiami głównemi elipsoidy bezwładności. Już same rysunki sprawę wyjaśniają. Trzeba zwrócić tylko na

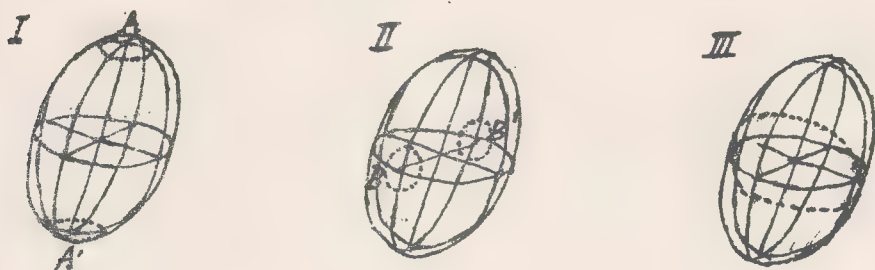


Fig 128.

to uwagę, że karolazarowa oś chwilowa przechodzi przez punkty styczności płaszczyzny, która stale od środka elipsoidy zostaje w odległości  $h$ . Gdy więc oś chwilowa ma przechodzić w bliskości osi największej (I.), to odległość  $h$  będzie utrzymana tylko przez to że elipsoida toczy się będzie po płaszczyźnie stycznej swoimi punktami blisko  $A, (A')$  znajdującymi się. Karady



punkt dalej się znajdujący na elipsoidzie od  $A$ , ( $A'$ ), niż punkt przez który przechodziła oś wirowania w pierwszej chwili. powodowałby zmianę swego  $h$ . Tak samo każdy bliżej. Łato więc będzie tak wirować, że kąt, jaki korydorasowa oś zamykać będzie z kierunkiem  $N$  będzie mały. Polhodya tworzyć będzie krzywą zamkniętą o niernacznej długości, a również her polhodya nie będzie zataczać wielkich kęgów na płaszczyźnie styknej. Podobnie się rzecz będzie mieć, gdy oś chwilowa znajduje się w bliskości osi najmniejszej (II). Inaczej atoli już będzie, gdy oś chwilowa zamyka mały kąt w pierwszej chwili z osią Średnią (III). Pomysłmy bowiem sobie całypek płaszczyzn przechodzących przez oś największą. Utworzą one z powierzchnią elipsoidy przekroje. Na korydorym z nich można znaleźć punkt, iż płaszczyzna stykna przezeń przechodząc będzie o  $h$  odległa od środka elipsoidy i wszystkie te punkty tworzą linię ciągłą. Otóż teraz będzie polhodya otaczać całą elipsoidę i oś będzie już teraz znów nie odchylać się. Jeśli postępu-

my się analogią, do przypadków równowagi, to powie-  
my, że dwa pierwsze wypadki zachowania się chwilo-  
wej osi obrotu odpowiadają równowadze stałej, zaś  
trzeci równowadze niestałej.

Porostaję nam jeszcze zdać sobie sprawę z zależ-  
ności unazianego ruchu obrotowego (koła osi swo-  
bodnej) od czasu. Do tego służą równania Eulera.  
W wypadku jednak całkiem ogólnym dostalibyśmy  
całki eliptyczne; ograniczymy się tedy do wypadku  
mniej ogólnego, ważnego jednak w praktyce, przyjmu-  
jąc symetrię obrotową tj. założymy, że momenty bez-  
władności ze względu na dwie osie główne są sobie równe:

$$B = C$$

Pod tym warunkiem i tym przyjęściu, który wca-  
łem rozważaniem tego ustępu czynimy, że na ciało  
wirujące nie działają momenty zewnętrzne, równania  
Eulera przyjmą postać:

$$A \frac{dp}{dt} = 0$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A-B)pz = 0 \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

$$B \frac{dr}{dt} + (B-A)q\beta = 0$$

Stąd  $p = \text{const}$  tj. prędkość wirowania kół osi, różni-  
cej się od dwu pozostałych (sobie równych) jest niezmien-  
na w czasie.

Uppochadniając drugie równanie względem czasu  
dostajemy:

$$B \frac{d^2 q}{dt^2} + (A - B) \frac{d^2 r}{dt^2} = 0$$

α wyrażając  $\frac{dr}{dt}$  z równania trzeciego, otrzymu-  
jemy:

$$B \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{(B-A)^2}{B} p^2 q$$

Równanie różniczkowe drugiego rzędu, podobne całkiem  
do tego, jakie już niejednokrotnie wyprowadziliśmy  
dla wahadła. Wiemy stąd już natychmiast rozwią-  
zanie:  $q$  wyrazi się jako funkcja periodyczna, cza-  
su:

$$q = q_0 \sin \alpha t$$

spełniające się pod warunkiem, że  $\alpha^2 = \frac{(B-A)^2}{B} p^2$ . Okres  
zmienności prędkości  $q$  wyrazi się:  $T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{p} \cdot \frac{B}{B-A}$ .

Tak samo będzie dla prędkości  $r$ . Znowu wyrazi się  
ona jako funkcja periodyczna czasu i będzie posia-  
dać oczywiście okres taki sam.



Powiemy więc, jeśli elipsoid bezwładności jest obrotową spłaszczoną np., (wtedy bowiem będzie zachodzić właśnie wypadek  $B=C$ ;  $A \neq B$ ), to ruch obrotowy tak się będzie odbywał, że wystąpią pewne ruchy perycydyczne, a mianowicie chwilowa oś wypadkowa nakreślić będzie stożek kołowy. Polhoda będzie kołem. Okres tego ruchu :

$$T = \frac{2\pi}{p} \frac{B}{B-A}$$

będzie tem dłuższy im stała prędkość obrotowa  $p$  jest mniejsza i im różnica momentów bezwładności:  $B-A$  jest mniejsza.

Przeprowadzając odpowiednie rachunki dla ziemi, dostajemy na stałą prędkość obrotową:  $p = \frac{2\pi}{24.60.60}$  (ilom. drogi i czasu). Momenty bezwładności  $A$  i  $B$ , dają się też bez większych trudności obliczyć. Ten drogą dostał Euler:  $T = 303$  dni. że oś chwilowa obrotu ziemi zmienia swoje położenie z czasem to stwierdzono przez obserwacje. Zmiany położenia chwilowej osi

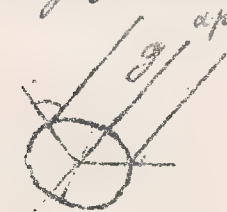


Fig 129.

obrotu obserwuje się najpewniej przez równoczesne pomiary szerokości astronomicznej a polaris z dwu przeciwuruchomienie na ziemi. Można potem kolejne pozycje osi chwilowej graficznie zanotować tworząc sobie odpowiednią mapę okolic polbiegunowych i dostać się w ten sposób polhody. Z tych pomiarów przekonano się jednak, że  $T$  tj. okres perturbacji Eulerowskich nie wynosi 303 dni ale 420 dni. (Newcomb, Rudaki). Różnica ta pochodzi stąd, że rachunek Eulera był przeprowadzony dla ciała sztywnego, trzeba więc uwzględnić, że ziemia nie jest jednolitą i nie posiada pewnej sprężystości. Co do wielkości wychyleń to są one bardzo małe około  $0.15''$  tj. odstępy na ziemi wynoszą kilka metrów tak, że dopiero precyzyjne pomiary zostały je pochwycić. Polhody z tych pomiarów otrzymane nie jest kołem ani wogóle jakąś krzywą regularną. Jest to krzywa dziwaczenie popłytana. (Z większej liczby obserwacyi moie da się zauważyć, że krzywa ta skapia się koło obwodu koła). Przyrządy tego nie są na razie dość wyjaśnione, bo badania są utrudnione. Zachodzą tu zadania =

Mechanika Dłk XXVI.

je się rozpręży atmosferyczne. Przyjęcie np. Syberyi war-  
stwą śniegu spowodowałoby już dosyć znaczne wychyle-  
nie.

Powinno rozważenia dotyczyć ruchu obrotowego ciała  
sztywnego nie podlegającego momentom sił. Siły  
translatoryczne mogą istnieć. Nie wpływają one, jak  
wiemy na ruch obrotowy. Teraz przejdziemy do roz-  
patrzenia ruchu obrotowego w którym atoli momen-  
ty sił zewnętrznych działają.

Ruch kraźnika. Ruch ciała sztywnego jest o-  
kreślony, jak wiemy, w zupełności sześcioma równa-  
niami analitycznymi nieracjonalnymi. Powiadamy  
stad, że ciało posiada sześć stopni swobody ruchu.  
Tę ilość możemy w dowolny sposób ograniczyć. Jeśli  
ułożymy tak warunki, że ciało sztywne musi pozosta-  
wać na jakiejś powierzchni, to posiadać ono będzie  
już tylko pięć stopni swobody ruchu. Jeśli ciało musi  
się poruszać po pewnej linii, to posiada ono już tylko



crtery, a jeśli ma pozostać w pełnem miejscu, to jest tylko trzy stopnie swobody ruchu tj. może się dowolnie jeszcze obracać. Te ogólne uwagi możemy stosować do



Fig. 130.

krażka. Gdy kraziek puścimy wolno na stół np. to dajemy mu pięć stopni swobody ruchu, gdy zmusimy go do poruszania się wzdłuż jakiejś nitki lub krawędki

to będzie on miał cztery stopnie swobody ruchu, gdy wreszcie włożymy go jednym końcem do łożyska pewnego to zostanie mu tylko trzy stopnie swobody ruchu tj. będzie mógł się kręcić około osi swobodnej.

Poprzednie ruchy posuwiste, rozpatrywane bliżej przy ruchu punktu materialnego, nie interesują nas tu.

Natomiast zwrócimy uwagę na ruchy obrotowe, jakie kraziek odbywa pod wpływem siły ciężkości. By można rzecz łatwiej ująć matematycznie, idealizujemy nasz kraziek tak, że ma on budowę zupełnie symetryczną i pomijamy wszelkie tarcie o łożysko, opór ośrołka i t.p. co by sprawę mogło komplikować. Jednem słowem: kraziek nasz jest sztywny, jednym

swoim punktem stale utwierdzonego w torysku, w czasie obrotu skłata nań tylko siłę ciężkości. Elipsoida bezwładności będzie obrotową i założymy, że równe momenty bezwładności są  $A$  i  $B$ , trzeci  $C$  jest różny od tych dwu. Odpowiednie prędkości naznaczymy  $p, q, r$ .

Aby badać teraz ruch krążka, możnaby się powrócić na równanie Eulera, które teraz przyjmą postać taką:

$$A \frac{dp}{dt} + (C-A)qr = P$$

$$A \frac{dq}{dt} + (A-C)pr = Q$$

$$C \frac{dr}{dt} = R$$

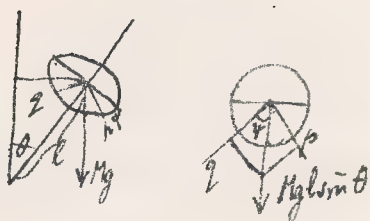


Fig 136

Przyjem momenty siły  $P, Q, R$  łatwo wyznaczyć jako składowe momentu wypadkowego:

$$Mgl \sin \theta.$$

Os momentu tego (ciężkości) jest prostopadła do osi krążka. Skąd mamy natychmiast:

$$P = Mgl \sin \theta \sin \varphi, \quad Q = Mgl \sin \theta \cos \varphi, \quad R = Mgl \sin \theta \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Zatem  $\frac{dr}{dt} = 0$  czyli prędkość  $r = \text{const.}$  Prędkości są  $p$  i  $q$

~~Wszystkie~~ ni są stałe. Składają się one wszystkie razem według prawa dodawania wektorów.

Wielkości  $p, q, r$  dające nam wyobrażenie o ruchu krawki są odniesione do elipsoidy bezwładności tegoż krawki nie określają nam jednak orientacji krawki w przestrzeni. Jeśli więc nam chodzi o ruch krawki w przestrzeni, musimy  $p, q, r$  wyrazić jako funkcje pewnych współrzędnych przestrzennych.

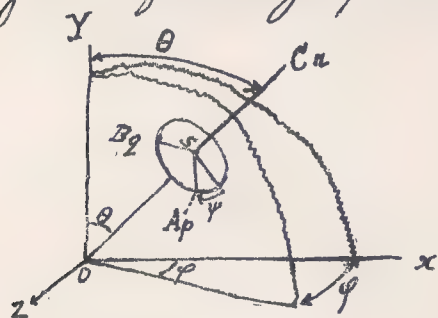


Fig. 131.

W tym celu wyobraźmy sobie, że koniec osi krawki umieszczony jest w początku układu, a przez oś krawki i oś  $y$  prowadzimy płaszczyznę. Kąt,

jaki ta płaszczyzna zamyka w płaszczyźnie  $(xy)$  nazywamy literą  $\varphi$ , kąt jaki oś wirowania krawki tworzy z osią  $y$  literą  $\theta$ , wreszcie kąt jaki tworzy oś  $A$  (siła oś względem której moment bezwładności jest  $A$ ) z płaszczyzną poprowadzoną przez oś wirowania krawki literą  $\psi$ .



Aby teraz wyrazić:

$$\left. \begin{matrix} p \\ q \\ r \end{matrix} \right\} \text{ jako } f_c \left( \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt} \right)$$

wystarczy zauważyć że można uważać  $p, q, r$  jako wektory wypadkowe składowych części wektorów  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  w odpowiednich kierunkach. Treba tedy  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  porządkować w pewne kierunki i tak otrzymane wektory składowe potem w odniesie kierunki  $p, q, r$ .

W myśl tych ogólnych uwag dla wyznaczenia  $r$  będziemy tak rozmawiać: Zmiana kąta  $\varphi$  nastąpić może tylko skutkiem obrotu koła osi  $y$ . Na niej więc odetniemy wektor prędkości  $\frac{dy}{dt}$ ; z prędkości tej w kierunku prędkości  $r$  przypadnie  $\frac{dy}{dt} \cos \theta$ .

Zmiana kąta  $\theta$  nastąpić może tylko skutkiem obrotu koła osi  $z$ , ruchomej, stale prostopadłej do płaszczyzny przechodzącej przez oś wirowania krążka. Na tej więc osi  $z$  odetniemy prędkość  $\frac{dz}{dt}$ ; w kierunku  $r$  przypadnie z niej wielkość  $\frac{dz}{dt} \cos \frac{\pi}{2} = 0$ , ponieważ  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ .

Nreszcie ze zmian kąta  $\psi$  przypadnie w kierunku

z okazywiscie prędkości:  $\frac{dy}{dt} \cos \theta$ . Utworzywszy sumę wszystkich tych wielkości, jakie w kierunku z przypada, dostajemy pierwszy wzór:

$$(1) \quad z = \frac{dy}{dt} \cos \theta + \frac{dy}{dt}$$

W celu wyrażenia  $p$  rozumujemy w sposób podobny. Z prędkości:  $\frac{dy}{dt}$ , którą wyobrażamy sobie jako odcinek na osi wirowania, przypadnie w kierunku  $p$  wielkość  $\frac{dy}{dt} \cos \frac{\pi}{2}$ , bo kierunek  $p$  jest prostopadły do osi wirowania.

Z prędkości  $\frac{dy}{dt}$  przypadnie w kierunku  $p$  wielkość:  $\frac{dy}{dt} \cos \alpha$ , gdzie, atoli kąt  $\alpha = \angle p y$  trzeba jeszcze na podstawie wzorów trygonometrii sferycznej przez znane wielkości wyrazić. W tym celu pomysłmy sobie osi  $y$

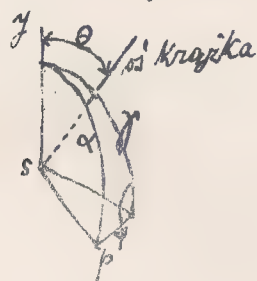


Fig 132

przesuniętą równoległą do swej pierwotnej pozycji do punktu  $S$ , i pomysłmy sobie kulę zatoczoną promieniem 1 koła  $S$  jako środka. Kąt  $\alpha$  jest wyrażony przez łuk  $\alpha$  koła

wielkiego poprowadzonego przez kierunki  $p$  i  $y$ . Dostajemy więc trójkąt sferyczny o bokach  $\alpha, \gamma, \psi$ , prostokąt

ny, bo płaszczyzna poprowadzona przez oś krawka jest prostopadła do samego krawka. Znany jest wzór w trygonometrii sferycznej:  $\cos \alpha = \cos \vartheta \cos \psi$ . Leżąc widocznie  $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \theta$ , zatem  $\cos \alpha = -\sin \theta \cos \psi$ . Na kierunek więc p przypadnie z  $\frac{d\vartheta}{dt}$  wielkość:  $-\frac{d\vartheta}{dt} \sin \theta \cos \psi$ .

Z prędkości:  $\frac{d\theta}{dt}$ , odczytej na osi z przypadnie w kierunku p, jak to natychmiast widać, skoro tylko pomyślimy sobie oś z przesuniętą do płaszczyzny krawka, wartość:  $\frac{d\theta}{dt} \sin \psi$ . Utworzywszy sumę



Fig. 133.

wszystkich prędkości, które w kierunku p przypadają dostajemy drugi wzór:

$$(2) \quad p = \frac{d\theta}{dt} \sin \psi - \frac{d\vartheta}{dt} \sin \theta \cos \psi$$

Jeszcze porostaje nam do wyrachowania q: Z prędkości  $\frac{d\vartheta}{dt}$  przypadnie w kierunku q, wartość  $\frac{d\vartheta}{dt} \cos \psi$ .



Fig. 134.

Z prędkości  $\frac{d\psi}{dt}$  przypadnie w tymże kierunku:  $\frac{d\psi}{dt} \cos \frac{\pi}{2} = 0$

Z prędkości  $\frac{d\theta}{dt}$ , odczytej więc na osi z przypadnie w tymże kierunku wielkość  $\frac{d\theta}{dt} \cos \beta$ , gdzie  $\cos \beta = \cos \vartheta$  (z q) wyznaczamy



znowu ze wzorów trygonometrii sferycznej, biorąc pod uwagę trójkąt prostokątny, zamknięty łukami wielkich kół:  $\beta$ ,  $\frac{\pi}{2} + \theta$ ,  $\frac{\pi}{2} + \psi$ . Będzie:

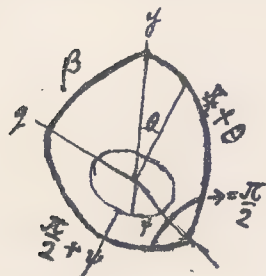


Fig 135

$$\cos \beta = \sin \theta \sin \psi,$$

czyli w kierunku  $q$  przypadnie  $\frac{dq}{dt}$  wielkość:  $\frac{dq}{dt} \sin \theta \sin \psi$ . Sumując znowu wynalezione trzy prędkości w kierunku  $q$  dostajemy trzeci wzór:

$$(3) \quad q = \frac{dp}{dt} \cos \psi + \frac{dq}{dt} \sin \theta \sin \psi.$$

Wzory (1), (2), (3) są to wzory Eulera. Mając owe wzory transformacyjnie i wyrażając momenty sił  $P$  i  $Q$ :

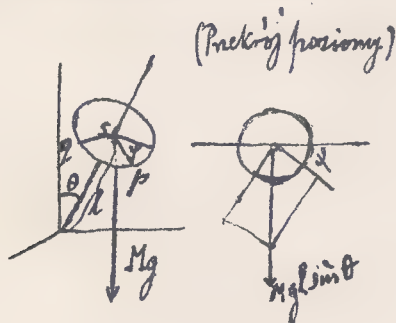


Fig 136.

$$P = Mgl \sin \theta \sin \psi$$

$$Q = Mgl \sin \theta \cos \psi$$

możemy to wszystko wstawić w równania Eulera i wykonać całkowanie. Prostszym jest

sposób opierać się na znanych nam dwu zasadach, obowiązujących dla ciała sztywnego, zasadzie zachowania energii mechanicznej i zasadzie zachowania mo-

mentów wycinkowych. Zasady te przy założeniach, pod którymś ruch kątka rozpatrujemy, są oczywiście ważne.

Zasada zachowania energii daje nam równanie:

$$E + Mgl \cos \theta = \text{const}$$

gdzie energia kinetyczna  $= E = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cz^2}{2} = \frac{A(p^2 + q^2)}{2} + \frac{Cz^2}{2}$ , gdzie  $z_0$  oznacza, jak to powiedzieliśmy, statyczną prędkość wirowania. Stąd

$$A(p^2 + q^2) + Cz_0^2 + 2Mgl \cos \theta = \text{const}$$

Według wzorów transformacyjnych jest:

$$p^2 + q^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2 \theta$$

a więc równanie poprzednie przechodzi na inne:

$$A \left[ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2 \theta \right] + Cz_0^2 + 2Mgl \cos \theta = \text{const.}$$

Kąt  $\theta$  jest zmienny i możemy co do niego zrobić taką założenie, aby dla pewnego  $\theta = \theta_0$ , zachodziła równość:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2 \theta = 0 \quad \left[ \text{to znaczy } \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0 \right].$$

stąd:

$$Cz_0^2 + 2Mgl \cos \theta_0 = \text{const}$$

Równość taka definiuje nam właśnie  $\theta_0$ . Odejmiemy

te równość ostatnią od równania poprzedniego, dostajemy równanie zachowania energii w formie:

$$(I) \quad A\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2 \theta\right] + 2Mgl(\cos \theta - \cos \theta_0) = 0$$

Teraz wyciągniemy jeszcze wnioski z zasady zachowania momentów wycinkowych. Koło osi  $y$  nie działa, zoidne momenty sił, zatem moment wycinkowy równy na płaszczyźnie poziomej ( $xz$ ) jest, w myśl ogólnych twierdzeń, wielkością stałą. Momenty składowe wycinkowe są, jak wiemy,  $A_p$ ,  $B_q$ ,  $C_z$ . Według więc poprzedniego twierdzenia suma rzutów:

$$A_p \cos \alpha + B_q \cos \beta + C_z \cos \theta = \text{const},$$

gdzie  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  mają znaczenia poprzednio wyrachowane; wstawiając takowe i zważając, że  $A=B$ , mamy:

$$A[-p \sin \theta \cos \varphi + q \sin \theta \sin \varphi] + C_z \cos \theta = \text{const}$$

Zwracając się teraz do wzorów transformacyjnych na  $p$  i  $q$  i wstawiając te wartości, dostajemy:

$$(II) \quad A \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \sin^2 \theta + C_z \cos \theta = \text{const}$$



Dla oznaczenia stałej  $Const$  zauważymy, że jak przedtem, dla kąta  $\theta_0$  mamy  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ,  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$  więc

$$C_2 \cos \theta_0 = Const;$$

Odejmując teraz to równanie od (II), dostaniemy postaci nieco wygodniejszą:

$$(II^*) \quad A \frac{d\theta}{dt} \sin^2 \theta + C_2 (\cos \theta - \cos \theta_0) = 0$$

Czyniąc teraz założenie, że nachylenie osi krążka ma to się różnić od wartości  $\theta_0$ , to znaczy że  $\theta - \theta_0 = \alpha$  wielkości bardzo małej, mamy:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}.$$

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = -2 \sin \frac{\theta + \theta_0}{2} \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} = -2 \alpha \sin \theta_0.$$

Tę to uproszczenia jakże się zwykło czynić, gdy wielkości jakiegś różnią się od siebie mniej niż tego dokładność naszego rachunku wymaga.

Wstawiając wartości na  $\frac{d\theta}{dt}$  i  $\cos \theta - \cos \theta_0$  do równań (I) i (II\*) i zastępując w pozostałych składnikach równań (I) i (II\*) kąt  $\theta$  przez  $\theta_0$  bardzo

mało się różniący od 0, dostaniemy uproszczone równania:

$$\text{III.} \begin{cases} a) A \left[ \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta_0 \right] - 4Mgl\alpha \sin \theta_0 = 0 \\ b) A \frac{d\varphi}{dt} \sin^2 \theta_0 - 2Cz_0 \alpha \sin \theta_0 = 0 \end{cases}$$

Rugując z tych dwóch równań  $\frac{d\varphi}{dt}$ , dostaniemy równanie różniczkowe ze względu na zmienną  $\alpha$ :

$$\left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \frac{4C^2 z_0^2}{A^2} \alpha^2 - \frac{4Mgl \sin \theta_0}{A} \alpha = 0$$

To równanie da się scałkować. Sprowadzamy je do formy:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{4Mgl \sin \theta_0}{A} \alpha - \frac{4C^2 z_0^2}{A^2} \alpha^2}} = dt$$

czy do formy

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{m\alpha - n\alpha^2}} = dt$$

Lewa strona tego równania da się przedstawić tak:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{\sqrt{m\alpha - n\alpha^2}} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{m}{n}\alpha - \alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{m^2}{4n^2} - \left( \frac{m}{2n} - \alpha \right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{m^2}{4n^2} - z^2}} = \frac{2\sqrt{n}}{m} \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{4n^2}{m^2} z^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d\left( \frac{2nz}{m} \right)}{\sqrt{1 - \left( \frac{2nz}{m} \right)^2}} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ma - nx^2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{n}} \int \frac{d\left(\frac{2mx}{n}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2mx}{n}\right)^2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{n}} \arcsin \frac{2mx}{n} =$$

$$= \mp \frac{1}{\sqrt{n}} \arcsin \frac{2mx}{n} \left[ \pm \left( \frac{m}{2n} - \alpha \right) \right] = \mp \frac{1}{\sqrt{n}} \arcsin \left[ \pm \left( 1 - \frac{2n\alpha}{m} \right) \right] = t + \text{const.}$$

Przywracając m i n ich znaczenia mamy:

$$\frac{A}{2Cz_0} \arcsin \left( 1 - \frac{2Cz_0^2}{AMgl \sin \theta_0} \alpha \right) = t + \text{const}$$

$$\arcsin \left( 1 - \frac{2Cz_0^2}{AMgl \sin \theta_0} \alpha \right) = \frac{2Cz_0}{A} t + \varepsilon$$

$$1 - \frac{2Cz_0^2}{AMgl \sin \theta_0} \alpha = \sin \left( \frac{2Cz_0}{A} t + \varepsilon \right)$$

Stąd wreszcie

$$\alpha = \theta - \theta_0 = \left[ 1 - \sin \left( \frac{2Cz_0}{A} t + \varepsilon \right) \right] \frac{AMgl \sin \theta_0}{2Cz_0^2}$$

czyli

$$\theta = \underbrace{\theta_0 + \frac{AMgl \sin \theta_0}{2Cz_0^2}}_{\text{const}} - \underbrace{\frac{AMgl \sin \theta_0}{2Cz_0^2} \sin \left( \frac{2Cz_0}{A} t + \varepsilon \right)}_{\text{sin}}$$

Widzimy, że prawa strona tej równości składa się z dwóch części: pierwsza jest wielkością stałą, nazwijmy ją literą  $\Theta_0$ , druga natomiast zawiera funkcję periodyczną, sin zależną od czasu. Krótko zapiszemy ten rezultat:



$$\theta = \theta_0 - \frac{AMgl \sin \theta_0}{2C_{r_0}^2} \sin\left(\frac{2C_{r_0}}{A}t + \varepsilon\right).$$

Wstawiając teraz wartość wyrażoną na  $\alpha$  w drugie równanie, z których wyszliśmy (III b.), dostaniemy

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2C_{r_0}}{A \sin \theta_0} \cdot \frac{AMgl \sin \theta_0}{2C_{r_0}^2} \left[1 - \sin\left(\frac{2C_{r_0}}{A}t + \varepsilon\right)\right]$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Mgl}{C_{r_0}} \left[1 - \sin\left(\frac{2C_{r_0}}{A}t + \varepsilon\right)\right]$$

skąd:

$$\varphi = \text{Const} + \frac{Mgl}{C_{r_0}} \left[t + \frac{A}{2C_{r_0}} \cos\left(\frac{2C_{r_0}}{A}t + \varepsilon\right)\right]$$

$$\varphi = \text{Const} + \frac{Mgl}{C_{r_0}} t + \frac{AMgl}{2C_{r_0}^2} \cos\left(\frac{2C_{r_0}}{A}t + \varepsilon\right)$$

Znowu rezultat ten krócej zapiszemy:

$$\varphi = \Phi_0 + \frac{AMgl}{2C_{r_0}^2} \cos\left(\frac{2C_{r_0}}{A}t + \varepsilon\right),$$

gdzie  $\Phi_0$  jest funkcją liniową argumentu  $t$ , drugi składnik natomiast zawiera peryodyczną funkcję  $\cos$ . Wprowadźmy jeszcze skrócenia na wielkości stałe:  $\frac{AMgl \sin \theta_0}{2C_{r_0}^2} = \mathcal{I}_0$ ,  $\frac{AMgl}{2C_{r_0}^2} = \mathcal{I}_0$ ,

$\frac{2C_{r_0}}{A} = h$ , to ruch krążka pod powyższymi za-

Łożemianu przedstawimy dwa równaniami:

$$\varphi = \Phi + \varphi_0 \cos(ht + \varepsilon)$$

$$\theta = \Theta_0 - \vartheta_0 \sin(ht + \varepsilon).$$

Prawe strony tych równań rozpadają się na dwie części. Składowiki  $\Phi$  i  $\Theta_0$  określają ruch jednostajny; według nich oś krążka zakresła stożek. Ruch ten nazywamy precessją. Kąt  $\Phi$  rośnie proporcjonalnie do czasu. Kółko ruchu precesyjnego superponowany jest drugi ruch, okresowy. Nazywamy go nutacją. Dobierając za początek liczenia ten chwile, dla której  $\varepsilon = 0$ , otrzymujemy na okres nutacji:  $T_n = \frac{2\pi}{h}$ , czyli

$$T_n = \frac{\pi A}{C r_0}$$

Okres precesji uwarunkowany jest równością  $\frac{M g l}{C r_0} T_p = 2\pi$ . Stąd okres precesji:

$$T_p = \frac{2\pi C r_0}{M g l}$$

Ruch wirującego krążka można łatwo interpretować geometrycznie. W tym celu wykreśliamy płaszczyznę

czytane normalną do osi krążka [w pozycji  $\Phi, \Theta$ ],  
w końcu tej osi i oznaczmy  
odchylenie  $\varphi, \theta$  od punktu  
 $\Phi, \Theta$  za pomocą współrzęd-  
nych  $\xi, \eta$ , tak że:

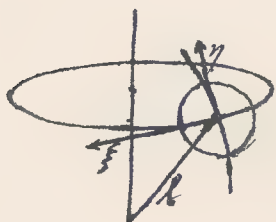


Fig.

$$\eta = l(\theta - \Theta)$$

$$\xi = l \sin \Theta (\varphi - \Phi)$$

Wtedy z owych równań wynika, że

$$\xi^2 + \eta^2 = [l \theta]^2 = \left[ \frac{A M g l^2 \sin \theta}{2 C^2 r^2} \right]^2.$$

Zatem oś krążka zakresła koło naokoło bieguna poru-  
szającego się  $[\Phi, \Theta]$ . Koło to będzie miało tem większe  
rozmiary im  $\theta$  jest większe. Zwracając się do znaczenia  
 $\theta$ , widzimy, że ono tem większe im prędkość wirowania po-  
czątkowa  $r$  jest mniejsza. Stąd pochodzi znane zjawisko,  
że gdy puścimy bączka na stół, to z początku nutacji  
prawie niema. Dopiero w miarę, jak skutkiem tarcia  
zmniejsza się prędkość wirowania  $r$ , staje się nutacja  
coraz widoczniejsza. Wzór na  $\varphi$  daje nam też



praktyczną wskazówkę, jak można nutację zmniejszyć (niezależnie od prędkości wirowania  $\omega$ ). O to wystarczy uczynić moment bezwładności ze względu na oś kręśka wirującego  $C$  jak największym. Uskutecznią się to zaś przez nagromadzenie możliwie wielkiej masy na obwodzie kręśka.

Doświadczalnie można ruchy te studjować na kręśku Bohnenbergera w zawieszeniu Cardanowskim.

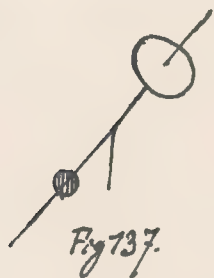


Fig 137.

Zapomocą ciężarówka przesuwalnego można dobierać różne momenty, któreby pod wpływem siły ciężkości działały lub też, by na kręśkach wirujących żaden moment nie działał.

Zjawisko precesji i nutacji zachodzi na wielką skalę w ruchu ziemi. Oś ziemi jest nachylona nieco do ekliptyki, że zaś największej masy ziemi jest na równiku, więc w pewnych porządkach w czasie swego obiegu koło Słońca ustawia się ziemia niesymetrycznie do płaszczyzny, którą byśmy sobie pomysłeli prze-

chodzącą przez środek ziemi prostopadle do Ekwidory  
Środków ziemi i Słońca. Porządek ten powtarza się oczy-  
wiście najwybitniej dwa razy w roku (w lecie i  
w zimie). Prócz tej niesymetryczności ustawienia  
się ziemi do Słońca dochodzi jeszcze druga niesy-  
metryczność ustawienia się ziemi względem Księży-  
ca. Ta ostatnia ma nawet skutkiem bliskości zie-  
mi i Księżyca większy wpływ na wspomniane  
zjawiska. Otóż skutkiem tych niesymetryczności  
powstaje na mocy prawa grawitacji moment siły  
staraający się ustawić oś ziemi prostopadle do eklipty-  
ki. Następstwem tego jest ruch precessyi i nutacyi zie-  
mi.

Według obserwacyj z czasów historycznych, przesu-  
nięcie się ziemi ze znaku barana do znaku ryb, obli-  
czono jako okres precessyi  $T_p = 25800$  lat; z nachylenia  
osi ziemskiej  $23.5^\circ$  do ekliptyki obliczono jako okres  
nutacyi ziemskiej  $T_n = 18.6$  lat. Amplituda nutacyi  
wynosi  $9.24''$ . Jest to wielkość dająca się obecnie łatwo  
zaobserwować,

Zjawisko precessji i nutacji ma też znaczenie dla geofizyków. Na mocy tych zjawisk starał się Hopkinson dowieść, że ziemia zachowuje się jak ciało sztywne.

Wypody te uważa się obecnie za błędne. Były to atoli pierwsze próby w celu określenia konstrukcji ziemi.

Obecnie dowodzi się sztywności ziemi przyptywami i odpływami morza, badaniami seismograficznymi.

My przez rozpatrywanie ruchu krojka mieliśmy sposobność zastosować równania Eulera. Rozpatrywaliśmy mianowicie wypadek, gdy zachodzi dla ciała wirującego symetria obrotowa. Rozpatrywanie ogólnego wypadku, gdy wszystkie trzy momenty główne bezwładności są różne jest już rzeczą daleko trudniejszą. Nie można wtedy równań różniczkowych ruchu całkować, tylko w pewnych specjalnych wypadkach. Jeden z takich wypadków podał P. Zofia Lowalewski. Teorję krojka przedstawili w obszernem dziele Klein i Sommerfeld.\*)

Na tem zakończymy mechanikę ciał sztywnych, a w dalszym ciągu będziemy się zajmować ogólnymi zasadami, a więc wyprowadzimy równania

\*) *Theorie des Kreisels* (Teubner).



## Lagrange'a i zasady Hamiltona.

### Równania Lagrange'a.

Widzieliśmy, że mechanikę ciał sztywnych można ująć w dwa twierdzenia: o zachowaniu środka masy i momentów wycinkowych. Pierwsza zasada daje trzy równania na ruch postępowy, druga znowu trzy równania na ruch obrotowy. Ponieważ ciało sztywne ma sześć stopni swobody ruchu, więc istotnie obie zasady wystarczają do opisu jego ruchu.

Jeżeli mamy do czynienia ze systemem nieswobodnym, gdzie zachodzi kilka stopni swobody, wtedy najlepiej jest użyć zasady d'Alemberta:

$$\sum_k \left[ \left( m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} - X_k \right) \delta x_k + \left( m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} - Y_k \right) \delta y_k + \left( m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} - Z_k \right) \delta z_k \right] = 0$$

gdzie  $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$  oznaczają przesunięcia przybliżone, a więc zgodne z warunkami ruchu. Też przesunięciami wyraża się zależność jednych części

składowych od drugich. Zasada d'Alemberta daje bezpośrednio równania ruchu.

Prócz zasady d'Alemberta można postać inne. Najpraktyczniej okazuje się używać równań Lagrange'a w ogólnych współrzędnych (nie tylko prostokątnych jak w zasadzie d'Alemberta).

Do równań Lagrange'a można dojść ze zasady d'Alemberta, wyrażając współrzędne:  $x, x_2, \dots, y, y_2, \dots, z, z_2, \dots$  jako funkcje nowych zmiennych:  $p, q, r, \dots$

$$(a) \begin{cases} x_1 = f_1(p, q, r, \dots) & y_1 = \varphi_1(p, q, r, \dots) & z_1 = \psi_1(p, q, r, \dots) \\ x_2 = f_2(p, q, r, \dots) & y_2 = \varphi_2(p, q, r, \dots) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{cases}$$

gdzie  $p, q, r, \dots$  są zmiennymi niezależnymi. Pod tem rozumiemy, że całkiem dowolnie (w pewnych granicach) przyjęcie  $p, q, r, \dots$  daje nam możliwą tj. zgodną z warunkami geometrycznymi pozycję systemu. Skąd to zatem zmiennne pozostające po wyłączeniu innych są pomocą warunków połączenia geometr.:  $\varphi(x, y, z, \dots) = 0$ ;  $\psi(x, y, \dots) = 0$  etc. Okazuje się naodwrot:

$$(b) \begin{cases} p = F_1(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots) \\ q = F_2(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots) \\ \vdots \end{cases}$$

Zmienne niezależne  $p, q, z, \dots$  mogą wyrażać jakieś wielkości, a więc: długości, kąty, objętości itp. Warunek jedyny, jaki na nie nakładamy jest ten, aby związki (a) i (b) wyrażały się za pomocą równań zwykłych (nie różniczkowych). Mówimy, że współrzędne te mają być funkcjami holonomicznymi. Istnieją przykłady, że warunki ruchu dają się wyrazić przez współrzędne, które są przedstawione przez równania różniczkowe niecałkowalne. Oci te wypadki z naszych rozważań wykluczamy.

Po tych umowach pozostaje nam tylko przeprowadzić odpowiednie transformacje.

Zauważymy przedewszystkiem, że składowe przesunięcia przygotowanego wyrażają się:

$$\delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial p} \delta p + \frac{\partial x_k}{\partial q} \delta q + \frac{\partial x_k}{\partial z} \delta z + \dots$$

Dla  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , gdzie  $n$  oznacza liczbę punktów systemu. Analogicznie wyrazi się  $\delta y_k, \delta z_k$ . Analogij tych okazujących tu i w dalszym ciągu wypisywać nie będziemy i tylko się na końcu na nie



powołamy.

Jeżeliśmy wartości noś  $\delta x_k$  ... wstawili w równanie Helmholtza dostalibyśmy:

$$m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \frac{\partial x_k}{\partial p} \delta p \dots \dots \dots = X_k \frac{\partial x_k}{\partial p} \delta p \dots \dots \dots$$

Otoż chodzi najpierw o wyrażenie:  $m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \frac{\partial x_k}{\partial p} \delta p$ . Tu używamy symboli skrótowych:  $\frac{dx_k}{dt} = \dot{x}_k$

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} = \frac{d \dot{x}_k}{dt} = \ddot{x}_k \quad (\text{to}).$$

Otoż wyrażenie, o które chodzi, napiszemy tak:

$$m_k \left( \frac{d \dot{x}_k}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial p} \right) \delta p = m_k \cdot \delta p \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial p} \right) - \dot{x}_k \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_k}{\partial p} \right) \right].$$

Zauważymy, że:

$$\dot{x}_k = \frac{\partial x_k}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial x_k}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x_k}{\partial r} \dot{r} + \dots \dots \dots ;$$

$$\text{oraz} \quad \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial p} = \frac{\partial x_k}{\partial p} ; \quad \text{analogicznie} \quad \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q} = \frac{\partial x_k}{\partial q} ; \quad \text{itd.}$$

Wprowadzając to wyżej dostaniemy:

$$\begin{aligned} m_k \left( \frac{d \dot{x}_k}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial p} \right) \delta p &= m_k \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial p} \right) - \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial p} \right] \delta p = \\ &= \frac{m_k}{2} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{x}_k^2}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial p} \left( \dot{x}_k^2 \right) \right] \delta p. \end{aligned}$$

To jest jeden z członów, z których trzeba całą sumę

utworzyć. Przyjdą jeszcze człony, zawierające w podobny sposób  $y_k, z_k$ . Względności całe wyrażenie mające za czynnik  $\delta p$  będzie:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial p} \frac{m_k}{2} (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) \right] \cdot \delta p - \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{m_k}{2} (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) \right] \cdot \delta p$$

Analogiczne zupełnie przyjdą wyniki przy  $\delta q, \delta r, \dots$  a wszystko to razem ma być pod znakiem sumy względem  $k=1, 2, \dots, n$ .

Zauważymy dalej, że  $\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2 = v_k^2$  i stąd

$$\frac{m_k}{2} (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) = \frac{m_k v_k^2}{2}$$

Wprowadzając teraz to wszystko istotnie w równanie D'Alemberta, porządkując według  $\delta p, \delta q, \delta r, \dots$  będziemy mieli

$$\begin{aligned} & \sum_k \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{m_k v_k^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{m_k v_k^2}{2} \right) - \left[ X_k \frac{\partial x_k}{\partial p} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial p} + \dots \right] \right\} \delta p + \\ & \sum_k \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{m_k v_k^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{m_k v_k^2}{2} \right) - \left[ X_k \frac{\partial x_k}{\partial q} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q} + \dots \right] \right\} \delta q + \\ & + \dots = 0 \end{aligned}$$

Zauważymy, że  $\delta p, \delta q, \delta r, \dots$  są dowolnymi. Rozważ

Mechanika Ark XXIX.

tedy ta może zachodzić tylko pod tym warunkiem, że  
korzysta z wypisanych sum po lewej stronie równań jest  
równa zero. Wprowadzając na oznaczenie całkowitej  
tej energii kinetycznej systemu literę  $L$ , dostaniemy  
w myśl powyższej uwagi równania:

$$(c) \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial L}{\partial p} &= \sum_k [X_k \frac{\partial x_k}{\partial p} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial p} + \dots] \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} &= \sum_k [X_k \frac{\partial x_k}{\partial q} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q} + \dots] \end{aligned} \right.$$

Są to właśnie równania Lagrange'a. Upraszczają  
się one jeszcze w wypadku, gdy mamy do czynienia  
z siłami konserwatywnymi. W tym bowiem razie  
prawa strona równania pierwszego przechodzi na:

$$-\sum \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial p} + \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial p} + \dots \right) = - \frac{\partial u}{\partial p}$$

i analogicznymi równaniami następnymi. Stąd wynika:

$$(d) \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial L}{\partial p} &= - \frac{\partial u}{\partial p} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} &= - \frac{\partial u}{\partial q} \\ &\vdots \end{aligned} \right.$$



W równaniach tych więc  $p, q, z, \dots$  oznaczają zmienne niezależne.

Równania Lagrange'a okazują się użyteczne nie w zastosowaniu do wypadków więcej zawiłych z tego głównie względu, że nie potrzeba przeprowadzać wiele transformacji, bo te już w trakcie wyprowadzenia tych równań do współrzędnych najogólniejszych uskutecznilismy.

Nieraz pisze się równania Lagrange'a w formie krótszej, wprowadzając potencjał kinetyczny,

$$H = L - U.$$

$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial L}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial p} = \frac{\partial L}{\partial p}$ , bo  $\frac{\partial U}{\partial p} = 0$ , ponieważ potencjał, jak wiemy jest funkcją współrzędnych, które tutaj są  $p, q, z, \dots$  a nie zawiera explicite prędkości. Równania poprzedniej formy przejdą teraz na inną:

$$(e) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right) - \frac{\partial H}{\partial q} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial q} \right) - \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

# Zastosowanie równań Lagrange'a. 1.) Uważajmy

punkt swobodny o masie  $m$  i trzech stopniach swobody ruchu. Postępując dalej równania Lagrange'a zauważymy że współrzędne  $p, q, r$ , są tutaj współrzędne prostokątne  $x, y, z$ . Energia kinetyczna tego punktu

$$L = \frac{m}{2} (\underbrace{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}_{v^2})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial x}$$

Tutaj  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$  ;  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$  . Zatem równanie Lagrange'a przyjmie postać:

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) - 0 = - \frac{\partial U}{\partial x}$$

czyli w myśl używanych znakowań

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X$$

Analogicznie oczywiście dostaniemy:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z .$$

Są to równania Newtona, znane nam już od dawna. Oczywiście, że nic nowego dostać nie mogliśmy.

2) Ruch obrotowy ciała koło osi stałej. Ruch taki

posiada jeden tylko stopień swobody. Do określenia całej pozycji ciała wystarczy podanie kąta  $\varphi$ . Zatem w równaniu Lagrange'a p zastąpimy przez  $\varphi$ .



Fig 138.

$$L = K \frac{\omega^2}{2} = \frac{K}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{K}{2} \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = K \dot{\varphi} \quad \frac{\partial L}{\partial p} = 0$$

Stąd równanie Lagrange'a będzie:

$$\frac{d}{dt} (K \dot{\varphi}) = - \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

$-\frac{\partial U}{\partial \varphi}$  oznacza tu moment siły powodującej obrót. Zamiast  $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$  można tu pisać  $\frac{dU}{d\varphi}$ ;  $dU$  oznacza pracę przy pewnym przesunięciu; zatem  $-dU = P d\varphi$ . Stąd znane równanie:

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = P.$$

3) Wahadło matematyczne uwytki. Użyjemy współrzędnych prostokątnych:



Fig 139.

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad U = -mgy$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = m\dot{y} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -mg$$

Stąd równanie Lagrange'a przyjmie

postać:

$$\frac{d}{dt} (m\dot{y}) = mg$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = g$$



Dostaliśmy więc równanie na ruch wahadła. Lecz równanie to jest oczywiście fałszywe. Wzorem leży błąd? O to w tem, że równanie Lagrange'a jest ważne dla współzależnych miaralnych, natomiast współrzędne  $x$  i  $y$  nie są niezależne; zachodzi bowiem związek między nimi:

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (\text{koło}).$$

Jeśli się tedy chce postąpić racjonalnie, trzeba wyznaczyć  $L$  przez zmienne niezależne, do czego krocząc, postawijmy nam właśnie związek między  $x$  i  $y$ . Mamy:

$$x \dot{x} + y \dot{y} = 0$$

$$\dot{x} = -\dot{y} \frac{y}{x}$$

Stąd 
$$L = \frac{m}{2} \dot{y}^2 \left[ 1 + \frac{y^2}{x^2} \right] = \frac{m}{2} \dot{y}^2 \frac{a^2}{a^2 - y^2}$$

Tutej już jest istotnie energia kinetyczna wyrażona przez jedną zmienną  $y$ , a więc warunek niezależności spełniony. Zatem:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} \frac{a^2}{a^2 - y^2} ; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = m \dot{y}^2 \frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^2}$$

Wstawiając te wyrażenia w równanie Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

dostaniemy równanie następujące:

$$m\ddot{y} \frac{a^2}{a^2-y^2} + 2m\dot{y}^2 \frac{a\dot{y}}{(a^2-y^2)^2} - m\dot{y}^2 \frac{a\dot{y}}{(a^2-y^2)^2} = mg \quad \text{czyli}$$

$$\ddot{y} \frac{a^2}{a^2-y^2} + \dot{y}^2 \frac{a\dot{y}}{(a^2-y^2)^2} = g.$$

Równanie to da się sprowadzić do zwykłej formy, jaką już spotykaliśmy dla wahadła matematycznego, gdy wprowadzimy współrzędne biegunowe.

Sprawa przedstawia się prościej, gdy od razu użyjemy współrzędnych biegunowych. Jako zmiennej niezależnej użyjemy kąta  $\varphi$ . Oczywiście mamy:

$$ds = a d\varphi$$

$$v = \frac{ds}{dt} = a \frac{d\varphi}{dt}$$

$$L = \frac{m}{2} a^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{m a^2}{2} \dot{\varphi}^2, \quad U = -mgy = -mga \cos \varphi.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -ma^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = mga \sin \varphi.$$

Zatem równanie Lagrange'a będzie:

$$ma^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mga \sin \varphi$$

$$a \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -g \sin \varphi$$

znana forma równania dla wahadła.

4) Wahadło stożkowe. Punkt materialny porusza się tu po powierzchni kuli, zatem mamy dwa stopnie swobody ruchu. Pozycja punktu określona będzie dwi-

ma kątami  $\theta$  i  $\varphi$ . To będzie spójrzne mieszanie i będzie  
tedy można dla nich stosować równanie Lagrange'a.

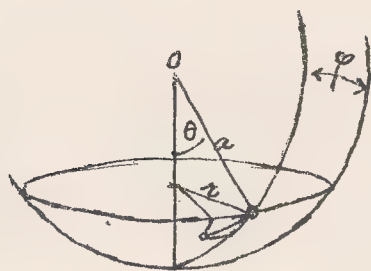


Fig 140.

Ruch chwilowy styczny do kuli mo-  
na rozłożyć na równoległe do pro-  
stutnika i równoleżnika. Stąd

$$v^2 = \left(a \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(a \sin \theta \frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$L = \frac{m}{2} a^2 [\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2]$$

$$U = -mga \cos \theta.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m a^2 \dot{\theta} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m a^2 \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta; \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = m g a \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m a^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

Wstawiając to w równania Lagrange'a dostajemy  
równania ruchu dla wahadła sferycznego:

$$\begin{cases} m a^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} - m a^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -m g a \sin \theta \\ m a^2 \frac{d}{dt} (\sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0 \end{cases}$$

czyli:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{a} \sin \theta \\ a^2 \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \text{Const} = c \end{cases}$$

Równanie drugie z uwagi, że  $r = a \sin \theta$ , daje



$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const.}$$

Zmnożenie tego równania znanej już w rozważań nad ruchem planet. Oznacza ono, że ~~prędkość~~ wycinkowa jest wielkością stałą. Skąd mamy  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}$ , co podstawiając w równanie pierwsze, dostajemy:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \frac{c^2}{a^2 \sin^4\theta} = -\frac{g}{a} \sin\theta \quad \text{czyli}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{c^2}{a^2} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} = -\frac{g}{a} \sin\theta \quad | d\theta$$

W celu całkowania tego równania, pomnożymy je przez  $d\theta$ . Będzie zatem

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{d\theta}{dt} dt - \frac{c^2}{a^2} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} d\theta = -\frac{g}{a} \sin\theta d\theta$$

Skąd

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{c^2}{2a^2 \sin^2\theta} = \frac{g}{a} \cos\theta + \text{const}$$

Dla drugiego całkowania przeprowadziwszy proste przemiany dostajemy postać:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{a} \cos\theta + \text{const} - \frac{c^2}{a^2 \sin^2\theta}}} = \int dt$$

Po lewej stronie jest całka eliptyczna. Gdy się ją wyliczy, dostaje się:

$$t = f(\theta)$$

Rozważmy chyba jeden specjalny wypadek, gdy  $\dot{\theta} = 0$  i  $\ddot{\theta} = 0$ . Wtedy  $\theta = \text{const}$ ,  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ . Z równania różniczkowego dostaje wtedy:

$$g \sin \theta = \frac{c^2}{a^3} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}$$

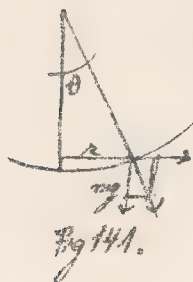
Stąd związek kąta  $\theta$  ze stałą  $c$ .

$$c^2 = g a^3 \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} = \left( \frac{dy}{dt} \cdot a^2 \sin^2 \theta \right)^2$$

Stąd

$$\left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{g}{a} \frac{1}{\cos \theta}$$

J. jeśli ruch ma się odbywać przy niezmienności  $\theta$ , to kątowa prędkość  $\dot{\theta}$  musi być dobrana według tego równania. Można do tego dojść bezpośrednio z rozważenia równowagi sił.



Równowaga wymaga, by sta wypadkowa miała kierunek nitki. Stąd sta odśrodkowa, jaka tu występuje, będzie:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{m \left( a \sin \theta \frac{dy}{dt} \right)^2}{a \sin \theta}$$

Drząc to przez  $mg$  dostajemy  $\tan \theta$ .

$$\tan \theta = \frac{a}{g} \sin \theta \left( \frac{dy}{dt} \right)^2$$

Stąd czas j.

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \frac{g}{a \cos \theta}$$

identyczne z poprzednim.  $\frac{dq}{dt}$  oznacza prędkość kątową. Możemy więc stąd wyciągnąć bezpośrednie wnioski do okresu wahania  $T$ . Jest bowiem

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{g}{a \cos \theta}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a \cos \theta}{g}}$$

wzór, który już przedtem mieliśmy (str 110).

5) Toczenie się walca po równi pochyłej pod wpływem siły ciężkości. Aby walec toczył się po równi pochyłej (nie ślizgał) muszą być powierzchnie obu ciał walca i równi dostatecznie szorstkie. Przy to-

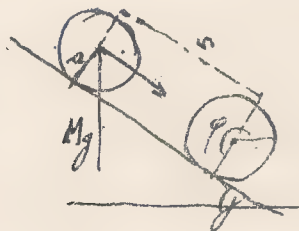


Fig 142.

czeniu się będzie pozycja walca jedno-

znacznie określona przez podanie łuku  $s = a \varphi$  odwinie-  
tego na równi ( $a$  promień walca,  $\varphi$  kąt). To więc będzie  
zmienna niezależna, której użyjemy w równaniu Lagran-  
ge'a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} = - \frac{\partial U}{\partial s}$$

Energia kinetyczna będzie tu sumą energii kinetycznej, ja-



ka wałek ma skutkiem ruchu postępowego i energii pochodzącej z ruchu obrotowego wałka.

$$L = \frac{M}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{K}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \left[ \frac{M}{2} + \frac{K}{2a^2} \right].$$

$$L = \frac{\dot{s}^2}{2} \left[ M + \frac{K}{a^2} \right].$$

$$U = -Mgy = -Mg s \sin \varphi.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \dot{s} \left[ M + \frac{K}{a^2} \right]; \quad \frac{\partial L}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial s} = -Mg \sin \varphi. \quad \text{Stąd}$$

$$\dot{s} \left[ M + \frac{K}{a^2} \right] = Mg \sin \varphi$$

czyli

$$\frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{g \sin \varphi}{1 + \frac{K}{Ma^2}}$$

Jest to równanie różniczkowe pierwszego nam już typu. Odrzuć wiemy, że ruch będzie jednostajnie przyspieszony. Przyspieszenie atoli:  $\frac{g \sin \varphi}{1 + \frac{K}{Ma^2}}$  jest odmiennie niż przy ślizganiu się ciała. Przy ślizganiu się bowiem jest, jak wiemy, przyspieszenie  $g \sin \varphi$ .

Oczywiście można było dojść do tego rezultatu bez użycia równań Lagrange'a. Można np. tak rozumować: Ruch postępowy i obrotowy postępują od siebie niezależnie. Pierwszy odbywa się tak, jakby wałek

Każde sily były skoncentrowane w środku masy, drugi tak jak gdyby środek był w spoczynku a działały nato miast tylko momenty cięż. to doświ. to nie wchodzi w rachubę i ta normalna, a wchodzi tylko dła styxna i dła tarcia.

Tak dostaniemy równania różniczkowe: dla ruchu postępowego:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = Mg \sin \gamma - R \quad (R = \text{tarcia})$$

dla ruchu rotacyjnego

$$K \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a R \quad (a = \text{promień walca}).$$

Drugie równanie (wobec  $s = a\varphi$ ) można napisać:

$$K \frac{d^2s}{dt^2} = a^2 R$$

Wielkość  $R$  nie jest znana a priori. Trzeba ją tedy wyregulować. Tak dostaniemy:

$$(Ma^2 + K) \frac{d^2s}{dt^2} = Mg \sin \gamma \cdot a^2$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g \sin \gamma}{1 + \frac{K}{Ma^2}}$$

Skąd  $R$  możemy a posteriori obliczyć:

$$R = \frac{K}{a^2} \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{K}{a^2} \cdot \frac{g \sin \gamma}{1 + \frac{K}{Ma^2}} = \frac{K g \sin \gamma}{a^2 + \frac{K}{M}} = \frac{M g \sin \gamma}{1 + \frac{Ma^2}{K}}$$

Dla ciał nie idealnie gładkich mamy empiryczne prawo tarcia  $R_s = \varepsilon F_n$ , gdzie  $\varepsilon$  oznacza współczynnik tarcia,

zasí Formacka nacisk normalny. Jeżeli siła docisku do powierzchni powierchni ciała względem siebie jest mniejsza niż tarcie, to ruch względny nie nastąpi, oczywiście żaden. Możemy sobie postawić pytanie, czy przy ciałach rzeczywistych nastąpi ślizganie, czy też tocznienie się i kiedy? Aby na to odpowiedzieć trzeba porównać ze sobą siły  $R$  i  $R_s$ . Chwila zastanowienia wystarczy, by poznać, że w razie nierówności:

$$R < R_s$$

nie może nastąpić ślizganie się. Ponieważ  $R_s = \varepsilon Mg \cos \gamma$ , więc w myśl tej nierówności jest:

$$\frac{Mg \sin \gamma}{1 + \frac{Ma^2}{K}} < \varepsilon Mg \cos \gamma$$

$$\tan \gamma < \varepsilon \left[ 1 + \frac{Ma^2}{K} \right]$$

Dla walca moment bezwładności ze względu na oś jego geometryczną, jak to łatwo obliczyć, wynosi:  $K = \frac{Ma^2}{2}$ . Łatwo

$$\tan \gamma < 3\varepsilon.$$

To jest warunek, aby nastąpiło tocznienie się walca. Położony więc, że tocznienie się nastąpi przy dostatecznie małych  $\gamma$ . Niech skończoność  $\varepsilon$  i już się łatwo znaleźć



takież i prędkość mi nastąpi. Zachodzi to także dla

$$R = R_s = \varepsilon Mg \cos \varphi$$

Rachunek cały wtedy się zmienia. W równaniach ruchu

$$M \frac{d^2 s}{dt^2} = Mg \sin \varphi - R$$

$$K \frac{d^2 \theta}{dt^2} = R a$$

zmienne  $s$  i  $\varphi$  mi są już ze sobą związane, są to zmienne niezależne. Te trzy równania wystarczą do wypracowania ruchu. Będzie on częściowo postępowy, częściowo obrotowy.

## Zasada Hamiltona.

Zasadę tę można wypracować z socznad Lagrange'a. W tych ostatnich wchodzi zmienne ogólne  $p, q, \dots$  niezależne, które czynić muszą każde równanie:

$$x = f_1(p, q, r, \dots)$$

$$y = f_2(p, q, r, \dots)$$

$$z = f_3(p, q, r, \dots)$$

Robimy założenie, że wartości tych funkcji  $f$  nie zmienia się z czasem.

Chcąc więc w ogólnych współrzędnych wyrazić energię systemu:

$$L = \sum m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

zauważymy, że

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 = & a_{11} \dot{p}^2 + a_{22} \dot{q}^2 + a_{33} \dot{r}^2 + \dots \\ & + a_{12} \dot{p} \dot{q} + a_{13} \dot{p} \dot{r} + \dots + a_{23} \dot{q} \dot{r} + \dots \end{aligned}$$

i analogicznie  $\dot{y}^2$ ,  $\dot{z}^2$ ; współczynniki  $a_{11}, a_{22}, \dots$  są już to zależne od  $p, q, r, \dots$  już to w szczególności stałe.

Rozważymy obecnie zmianę energii kinetycznej  $\delta L$ .

Zmiana taka może pochodzić albo stąd, że prędkości się zmieniają albo stąd, że współrzędne ulegają zmianie.

Gdy więc zmianę energii rozpatrywać będziemy ze względu np. na współrzędną  $p$  to powiemy:

$$\begin{aligned} \delta_p L &= \frac{\partial L}{\partial p} \delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \delta \dot{p} \\ &= \frac{\partial L}{\partial p} \delta p + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \delta p \right] - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) \cdot \delta p \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \delta p \right] - \underbrace{\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial L}{\partial p} \right]}_{\frac{\partial u}{\partial p}} \delta p \end{aligned}$$

Lecz spożycymyik przydp w ostatniem równaniu ni wy-  
razia nic innego jak lewą stronę równania Lagran-  
ge'a. Zatem:

$$\delta L = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \delta p \right] + \frac{\partial L}{\partial p} \delta p$$

Analogicznie wyrazi się  $\delta_2 L, \delta_3 L, \dots$  i stąd zmiana  
całkowita energii:

$$\delta L = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + \dots \right] + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial p} \delta p + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \dots}_{\delta U}$$

czyli

$$\delta(L - U) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + \dots \right].$$

Uważajmy teraz dwie chwile czasu  $t_1, t_2$  między  
którymi zmiana powyższa następowała, to

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(L - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + \dots \right] dt$$

czyli

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(L - U) dt = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + \dots \right] \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Prawa strona tej równości stanie się zerem, jeśli zab.



zimy, że zmiany  $\delta p = \delta q = \dots = 0$  dla chwil  $t_1$  i  $t_2$ .  
Wtedy

$$\int_{t_1}^{t_2} (L - U) dt = 0$$

i to jest właśnie zasada Hamiltona. Jakże jej znaczenie? Ruch rzeczywisty punktu lub systemu pod wpływem siły w pewnym kierunku działającej można sobie uzmysłowić jakoś krzywą przestanną od punktu 1



Fig. 143.

do 2. Dla czasu od  $t_1$  do  $t_2$ . Między punktami 1 i 2, które są stałe, można sobie pomysłować nieskończenie wiele dróg, po których ruch mógłby się w owym czasie ( $t_2 - t_1$ ) odbyć. Wariacja całki dla ruchu rzeczywistego jest równa zero, jeśli od tego ruchu przejść do ruchu nieskończenie mało od niego się różniącego.

Z zasady Hamiltona wnioskujemy natychmiast, że wartość całki dla ruchu rzeczywistego będzie zawsze minimum lub maximum. Rozstrzygając o tem wari-

czyli jeżeli średnia, czy zachodzi minimum czy też maximum. Z reguły jest minimum.

Zasada Hamiltona pisze się tej krócej kładąc  $L=U+H$ ,  
wtedy:

$$\int_{t_1}^{t_2} H dt = 0$$

Do zagadnień specjalnych zasada Hamiltona nie jest praktyczna, ale zato odznacza się zwierzęcią...

Zastosowanie: 1. Rozważmy na podstawie zasady Hamiltona spadanie ciała.

1<sup>a</sup>  $L = \frac{m}{2} \dot{x}^2$ ,  $U = -mgx$

1<sup>2</sup> Według zasady Hamiltona jest dla ruchu rzeczywistego:

Reg 144.  $\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 + mgx \right) dt = 0$

czyli

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( m \dot{x} dx + mgx dx \right) dt = 0$$

Leż  $\int_{t_1}^{t_2} \dot{x} dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x} dx - \int_{t_1}^{t_2} \dot{x} dx dt$  (kalkuluje się przez partiały)  
 $= \int_{t_1}^{t_2} \dot{x} dx dt$

Pierwszy składnik bowiem odpada z tego powodu, że dla

granic postawienia  $\delta x_1 - \delta x_2 = 0$ . Wstawiając obliczoną wartość całki wyżej mamy:

$$\int_{t_1}^{t_2} (g - \ddot{x}) \delta x dt = 0$$

Równość ta ma zachodzić dla wszystkich możliwych zmian  $\delta$ ; to możliwe gdy sam nawias jest równy zero, gdy więc

$$g = \ddot{x}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g$$

Doszlismy więc tak drogą krótką do znanego rezultatu.

2. Na spadanie ciał pod wpływem ciężkości moglibyśmy podać kilka hipotez: a) ciało spada ruchem jednostajnie przyspieszonym (prawo spadania) tj. droga  $x = \frac{g}{2} t^2$ . Dla pewnego  $T$ , gdy punkt spadnie z pozycji

1 do 2 jest  $x_2 = \frac{g}{2} T^2$ .

Obliczmy wartość całki:

2  
1  
Fig. 145

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{mg^2 t^2}{2}; \quad U = -mgx = -\frac{mg^2 t^2}{2}$$

$$L - U = mg^2 t^2; \quad \text{stad}$$

$$\int mg^2 t^2 = mg^2 \frac{T^3}{3}$$

b) możemy przypuszczać, że ruch odbywa się z prędkością



jednostajną. Wtedy  $x = \frac{x_2 t}{T} = \frac{g T}{2} t$ ; teraz  $x = \frac{g T}{2}$ .

$$L = \frac{m \dot{x}^2}{2} = \frac{m g^2 T^2}{8}. \quad U = -m g x = -\frac{m g^2 T t}{2}.$$

$$\int_0^T (L - U) dt = \frac{m g^2 T^3}{8} + \frac{m g^2 T^3}{4} = \frac{3}{8} m g^2 T^3.$$

c) tak samo moglibyśmy wogóle zakładać, że  $x = f(t)$  przyczem dla  $t=0$  jest  $x=0$ , dla  $t=T$  jest  $x = \frac{g T^2}{2}$ . Za każdym razem przekonalibyśmy się, że wartość całki pod a) jest najmniejszą. Być tak oczywiście powinno, bo ruch pod a) jest rzeczywisty.

Jeśli przyjmiemy zasadę Hamiltona jako daną, to łatwo nadmienić wyprocedować równania Lagrange'a.

Energia kinetyczna wyraża się na ogół jako funkcja sił, prędkości i przyspieszeń:

$$L = f(p, q, z, \dots, \dot{p}, \dot{q}, \dot{z}, \dots)$$

Potencjał  $U$  wyraża się natomiast tylko jako funkcja współrzędnych. Wynika to z definicji potencjału.

$$U = f(p, q, z, \dots).$$

Tworząc wariacje tych funkcji, tego bowiem żąda

zasada Hamiltona:

$$\int \delta(L-U) dt = 0$$

mamy:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial p} \delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \delta \dot{p} + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \dots$$

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial p} \delta p + \frac{\partial U}{\partial q} \delta q + \dots$$

Wprowadzając to do zasady Hamiltona i pisząc nadzwyczajem całki oznak sumy, który ma nam przypominać, że przeprowadzamy działania względem  $p, q, z, \dots$ , dostaniemy:

$$\sum_{p, q, z, \dots} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial p} \right) \delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \delta \dot{p} \right] dt = 0$$

Całkując per partes

$$\int \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \delta \dot{p} dt = \left[ \delta p \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right]_{t_1}^{t_2} - \int \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) \delta p dt$$

i wstawiając to w sumę, mamy:

$$\sum_{p, q, z, \dots} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial p} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) \right] \delta p dt + \sum_{p, q, z, \dots} \left[ \delta p \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Ostatnia suma znika, bo dla  $t_1$  i  $t_2$  niemożliwość zmiany. To co zostaje, zachodzi może przy  $\delta$  rel-

nych  $\delta p$  tylko w tym razie, gdy nowiad  $= 0$ . Nawias ten zaś przedstawia właśnie równanie Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial L}{\partial p} = - \frac{\partial U}{\partial p}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial U}{\partial q}$$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

Zastosowanie zasady Hamiltona w wypadku równowagi. Jeśli zachodzi równowaga, to energia kinetyczna znika i zasada Hamiltona redukuje się do formy:

$$\int_1^2 U dt = 0$$

i wtedy wogóle:  $\int U = 0$

ten potencjał jest w tym stanie minimum albo maximum zależnie od znaku potencyatu i zmian jakie mogą zająć. To możemy zastosować do równowagi nitek, łańcuchów itp.

Damy jest łańcuch zawieszony końcami w dwóch punktach. Na łańcuch ten działają siły  $X, Y, Z$ . Pyta-



my, jaki kształt przyjmie łańcuch. Zakładamy, że łańcuch ten jest jednorodny tj. każda jego część ma tę samą gęstość, dalej że łańcuch ten jest nierozciągliwy.



Fig 146.

Jeśli ma być równowaga, to dla każdego elementu  $ds$  łańcucha musi zachodzić:

$$\delta U = 0$$

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z = -(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z)$$

i przeto dla całego łańcucha zachodzi też:

$$\int_0^l (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds = 0$$

Z warunku zaś nierozciągliwości wynika:

$$\int_0^l ds = \text{const}$$

Zadanie tedy nasze redukuje się do znalezienia max. względnie min. przy pewnym warunku. Stosując metodę Lagrange'a utworzymy wyrażenie.

$$\int_0^l (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds + \int \lambda \delta ds = 0$$

Zauważymy:  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

$$ds \delta ds = dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz$$

$$\delta ds = \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz$$

$$\int_1^2 \underbrace{\lambda}_{\frac{dx}{ds}} \underbrace{ds}_{dv} = \lambda \frac{dx}{ds} \delta x - \int d(\lambda \frac{dx}{ds}) \delta x = \lambda \frac{dx}{ds} \delta x - \int \frac{d}{ds} (\lambda \frac{dx}{ds}) \delta x ds$$

(całkowanie per partes). Notując to do powyższego wyrażenia, dostaniemy:

$$\int_1^2 \left\{ \left[ X - \frac{d}{ds} \left( \lambda \frac{dx}{ds} \right) \right] \delta x + \left[ Y - \frac{d}{ds} \left( \lambda \frac{dy}{ds} \right) \right] \delta y + \left[ Z - \frac{d}{ds} \left( \lambda \frac{dz}{ds} \right) \right] \delta z \right\} ds + \left[ \lambda \frac{dx}{ds} \delta x + \lambda \frac{dy}{ds} \delta y + \lambda \frac{dz}{ds} \delta z \right]_1^2 = 0$$

Ostatni składnik znika przy podstawieniu granic, bo łańcuch jest w punktach 1 i 2 przymocowany, zatem  $\delta x = \delta y = \delta z = 0$ .

Pozostałe wyrażenie zaś może przy dowolności  $\delta x, \delta y, \delta z$  tylko wtedy zachodzić gdy spełnione są następujące trzy równania Lagrange'a:

$$X = \frac{d}{ds} \left( \lambda \frac{dx}{ds} \right)$$

$$Y = \frac{d}{ds} \left( \lambda \frac{dy}{ds} \right)$$

$$Z = \frac{d}{ds} \left( \lambda \frac{dz}{ds} \right)$$

Do równań tych można dojść bezpośrednio rozważając równowagę każdego kawałka łańcucha. Na element  $ds$  łańcucha, który możemy sobie na chwilę wyobrazić jako wycięty z całości, działają siły (napięcia) u dołu  $T$  u góry  $T'$ .

Mechanika Strk XXXII.

utrzymujące go w równowadze. Osi te napięcia możemy sobie rozłożyć w trzech kierunkach  $x, y, z$ .

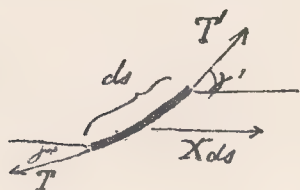


Fig 147.

W kierunku  $x$  przypada  $T$  z napięcia górnego  $T' \cos \alpha = T' \frac{dx}{ds}$ , z napięcia  $T'$  dolnego  $-T' \cos \beta = -T' \frac{dx}{ds}$ , a że na element ów działa jeszcze siła  $X ds$  w kierunku

osi  $x$ , więc całkowita siła działająca na ów element w kierunku osi  $x$  jest:

$$X ds + T' \left( \frac{dx}{ds} \right) - T \left( \frac{dx}{ds} \right) = 0 \quad \text{czyli}$$

$$X + \frac{d}{ds} \left( T \frac{dx}{ds} \right) = 0$$

Analogicznie

$$Y + \frac{d}{ds} \left( T \frac{dy}{ds} \right) = 0$$

$$Z + \frac{d}{ds} \left( T \frac{dz}{ds} \right) = 0$$

Są to te same równania Lagrange'a co wyżej. Widzimy tu zarazem znaczenie mechaniczne swego czynnika nieokreślonego  $\lambda$ , któryśmy poprzed wprowadzili. Oznacza on poprzek napięcia łańcucha.

Takie równanie:

$$\int (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds = - \int \delta U ds = 0$$



ma proste znaczenie mechaniczne. Pisząc je w formie

$$\delta(\sum u) = 0$$

widzimy, że oznacza ono, że wariacja sumy potencjałów składowych = 0. Jeśli chodzi o ciężkość  $U_k = mgy_k$  więc

$$U = \sum mgy = g \sum my,$$

to dostajemy  $\delta \underbrace{\sum my}_{\eta \cdot \sum m} = \delta[\eta \cdot \sum m] = 0$ , tj. środek

masy łańcucha ma leżeć najniżej; wariacja bowiem ma się tylko odnosić do  $\eta$ , a więc owo  $\eta$  ma być maximum lub minimum.

Jeśli siły działające na łańcuch są potencjalne,  $X, Y, Z$ , to możemy wyprowadzić jeszcze jedną relację. Kłopotujemy w równaniach Lagrange'a czynnik nieokreślony  $\lambda$  jest zmien-  
ny w zależności od pozycji w łańcuchu. Stąd równa-  
nia Lagrange'a możemy inaczej tak napisać:

$$\begin{array}{l|l} \frac{d\lambda}{ds} \frac{dx}{ds} + \lambda \frac{d^2x}{ds^2} = X & \frac{dx}{ds} \\ \frac{d\lambda}{ds} \frac{dy}{ds} + \lambda \frac{d^2y}{ds^2} = Y & \frac{dy}{ds} \\ \frac{d\lambda}{ds} \frac{dz}{ds} + \lambda \frac{d^2z}{ds^2} = Z & \frac{dz}{ds} \end{array}$$

Stąd dostajemy:

$$\frac{d\lambda}{ds} \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2} + \lambda \left( \frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} \right) =$$

$$= \frac{X dx + Y dy + Z dz}{ds}$$

Lece oczywiste:  $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2} = 1$  ;  $\frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} =$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 \right] = 0$$
 ;  $X = -\frac{\partial U}{\partial x}$  ,  $Y = -\frac{\partial U}{\partial y}$  ,  $Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$ .

Część więc powyższe wyrażenie przybiera kształt:

$$d\lambda = -dU$$

$$\lambda = -U + \text{const}$$

tj czynnik  $\lambda$ , czyli napięcie jest miarą potencjału, które w danym punkcie istnieje.

Jako specjalny wypadek porozważmy łancuch w polu ciężkości.

$$X=0, Y=-\gamma, Z=0$$

$-\gamma$  oznacza ciężkość 1cm długości, więc

$$\gamma = \rho g$$

( $\rho$  przekrój,  $g$  gęstość  $g$  przysp.)



Fig 748.

Równania poprzednie przyjmą kształt:

-251-

$$\frac{d}{ds} \left( \lambda \frac{dx}{ds} \right) = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left( \lambda \frac{dy}{ds} \right) = -\gamma$$

$$\frac{d}{ds} \left( \lambda \frac{dz}{ds} \right) = 0$$

Zakładając, że ścieżka jest w płaszczyźnie  $x, y$  możemy trzecie równanie opuścić. Z dwóch cało pierwszych przez całkowanie dostajemy:

$$\lambda \frac{dx}{ds} = \text{const} = c$$

$$\lambda \frac{dy}{ds} = -\gamma s + b$$

Początek układu jest dowolny. Założymy, że niech się on tam znajduje, gdzie ścieżka jest pozioma tj.  $\frac{dy}{ds} = 0$ , oraz  $s=0$ . Dostajemy stąd skreślenie stałej  $b=0$ . Łatwo

$$\lambda \frac{dx}{ds} = c$$

$$\lambda \frac{dy}{ds} = -\gamma s$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\gamma}{c} s$$

Chcąc to równanie całkować musimy uwzględnić zależność  $s$  od  $x$  i  $y$ . Użyjemy tu metody różniczkowania:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\gamma}{c} \frac{ds}{dx} = -\frac{\gamma}{c} \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}$$



$$\int \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} dx = - \int \frac{y}{c} dx$$

Kładąc  $\frac{dy}{dx} = p$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$  mamy:

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} &= \log(p + \sqrt{1+p^2}) = \log\left(\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) = \\ &= -\frac{y}{c} x + \text{const} \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = e^{-\frac{y}{c} x + \text{const}} = a e^{-\frac{y}{c} x}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a e^{-\frac{y}{c} x} - \frac{dy}{dx}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2 e^{-\frac{2y}{c} x} - 2 \frac{dy}{dx} a e^{-\frac{y}{c} x} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 e^{-\frac{2y}{c} x} - 1}{2 a e^{-\frac{y}{c} x}} = \frac{1}{2} \left\{ a e^{-\frac{y}{c} x} - \frac{1}{a} e^{\frac{y}{c} x} \right\}$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{c}{y} \left\{ -a e^{-\frac{y}{c} x} - \frac{1}{a} e^{\frac{y}{c} x} \right\} + \text{const}$$

Dla oznaczenia stałych całkowania przyprzmiemy, że dla  $x=0$ ,  $\frac{dy}{dx}=0$  bo wtem miejscu tańcuch jest poziomy. Zechroćki więc jedno równanie:

$$0 = \frac{1}{2} \left\{ a - \frac{1}{a} \right\}$$

skąd  $a=1$ . Zatem

$$y = -\frac{c}{2f} (e^{\frac{fx}{c}} + e^{-\frac{fx}{c}}) + \text{Const}$$

Na razie określiliśmy os'  $y$ ; os  $x$  tak dobraćemy, żeby  $\text{Const}$  zniknęło tj. gdzie  $x=0$ , tam  $y = -\frac{c}{f}$ . Stąd  $c$  jest dowolna. Przyjmując znak  $+$  na miejsce  $-$ , co prosto można tak wyjskać, że na miejsce  $c$  wstawimy  $-c$  dostajemy równanie linii łuku chowej:

$$y = \frac{c}{2f} (e^{\frac{fx}{c}} + e^{-\frac{fx}{c}})$$

To równanie można inaczej napisać:

$$y = \frac{m}{2} (e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}})$$

lub

$$y = m \cdot \cosh \left( \frac{x}{m} \right)$$

Z tych równań możemy wywnioskować jaki kształt ma krzywa.

Chcąc oznaczyć napięcie  $\lambda$ , względnie  $-\lambda$  rekurujemy do równań

$$\lambda \frac{dx}{ds} = c$$

$$\lambda \frac{dy}{ds} = -fs$$

$$\lambda^2 \frac{dx^2 + dy^2}{ds^2} = c^2 + y^2 s^2$$

$$\lambda = \sqrt{c^2 + y^2 s^2}$$

(Znak + bierzemy bo chodzi nam o wartość bezwzględną).

Wielkość owego  $\lambda$  można kresłą wykombinować bezpośrednio. Chodzi nam o napięcie w pewnym miejscu.

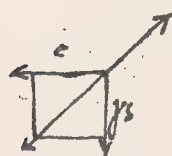
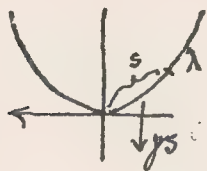


Fig 149.

Łęść łuku  $s$  posiada ciężar  $y_s$ , napięcie zaś w miejscu poziomem w kierunku poziomym wynosi  $c$ , to równanie  $\lambda \frac{dx}{ds} = c$  przechodzi dla tego miejsca w  $\lambda_0 = c$ . Ze składowania sił wynika

więc 
$$\lambda = \sqrt{c^2 + y^2 s^2}$$

Mieliśmy przedtem równanie :

$$\lambda = -U$$

Ponieważ tu w szczególności  $U = y y$ , zatem

$$y^2 y^2 = c^2 + y^2 s^2$$

$$s^2 = y^2 - m^2$$

$$s = \sqrt{y^2 - m^2}$$

Jest to własność linii tańcuchowej, mocą której



kwadrat siły ciężkości = różnicy kwadratów krzywizny i stałej  $m$ . Można to sprawdzić przez rektyfikację.

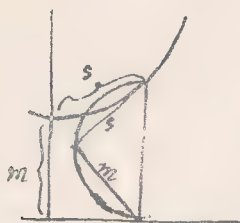


Fig 150.

Wziewzajemnie z tym pogadaniem, które resziny tu rozstrzygali są inne problemy. Można by się pytać np. o warunki równowagi, gdy ciężar nie jest równomiernie rozłożony. Miałoby to miejsce, gdyby na karole cm reuta przypadał ciężar jednakowy. Naturalna przekrój się łańcuch na dole musiałby być grubszy niż w innych miejscach. W praktyce jest to wręczewistnione ponieważ przy mostach łańcuchowych, w których ciężar głównie pochodzi od belki a ciężar łuku jest stosunkowo nieznaczny.



Fig 151.

Beżkie teraz:  $X=0$ ,  $Y = \gamma \frac{dx}{ds}$ ;

$$\lambda \frac{dy}{ds} = c; \quad \frac{d}{ds} \left( \lambda \frac{dy}{ds} \right) = \gamma \frac{dx}{ds}$$

$$\lambda \frac{dy}{ds} = \gamma x + \alpha$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma}{c} x + \frac{\alpha}{c}$$

$$y = \frac{\gamma}{c} \frac{x^2}{2} + \frac{\alpha}{c} x + \beta$$

jest to równanie paraboli. Łańcuch więc w tym wypadku ułoży się w kształcie paraboli.

## Ruch względny.

Dotychczasowe równania ruchu wyprowadziliśmy dla układu nieruchomego z czasem w przestrzeni. Takim równaniem jest np. równanie d'Alemberta:

$$\sum [m(\frac{d^2x}{dt^2} - X)\delta x + (m\frac{d^2y}{dt^2} - Y)\delta y + (m\frac{d^2z}{dt^2} - Z)\delta z] = 0$$

Zapytamy się obecnie, jakim zmianom ulegną te równania w razie zmienności układu. Widoć one bowiem, jest przecież, że nie zmieniają się one przy jednostajnej translacji układu. W szczególności rozstrzygniemy pytanie, jakim zmianom ulegną równania ruchu w razie obrotu układu jednostajnego, zakładając, że  $\omega$  zostaje niezmieniona. Kąt  $\varphi$  rośnie proporcjonalnie do czasu. Jeśli wektor  $\mathbf{k}$  kątowny naznaczymy:  $\omega$ ,

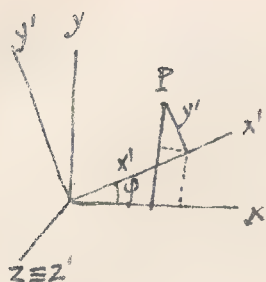


Fig 152.

$$\varphi = \omega t.$$

Wzory transformacyjne są tu:

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t$$

Chcąc tedy otrzymać równanie d'Alemberta dla nowego układu wystarczy zastosować owe wzory transformacyjne w celu wyrażenia zmiennych występujących w równaniu d'Alemberta przez zmienne nowe.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} \cos \omega t - x' \omega \sin \omega t - \frac{dy'}{dt} \sin \omega t - y' \omega \cos \omega t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx'}{dt} \sin \omega t + x' \omega \cos \omega t + \frac{dy'}{dt} \cos \omega t - y' \omega \sin \omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} \cos \omega t - 2 \frac{dx'}{dt} \omega \sin \omega t - x' \omega^2 \cos \omega t - \frac{d^2y'}{dt^2} \sin \omega t - 2 \frac{dy'}{dt} \omega \cos \omega t + y' \omega^2 \sin \omega t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} \sin \omega t + 2 \frac{dx'}{dt} \omega \cos \omega t - x' \omega^2 \sin \omega t + \frac{d^2y'}{dt^2} \cos \omega t - 2 \frac{dy'}{dt} \omega \sin \omega t - y' \omega^2 \cos \omega t$$

$$\frac{dz}{dt^2} = \frac{dz'}{dt^2}$$

$\delta x, \delta y, \delta z$  wyrażę nam przez zmienne przygotowane



są zgodne z warunkami ruchu geometrycznymi. Skie zależą  
tedy one od czasu  $t$ . Stąd

$$\delta x = \delta x' \cos \omega t - \delta y' \sin \omega t$$

$$\delta y = \delta x' \sin \omega t + \delta y' \cos \omega t$$

$$\delta z = \delta z'$$

Dalej praca przygotowana jest też niezależna od układu  
stąd:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z'.$$

Wszystkie teraz te wartości wstawimy w równanie  
d'Alemberta. Dostaniemy:

$$\begin{aligned} \sum & \left[ \left\{ m \left[ \frac{d^2 x'}{dt^2} - x' \omega^2 - 2 \frac{dy'}{dt} \omega \right] - X' \right\} \delta x' \right. \\ & + \left\{ m \left[ \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \omega^2 + 2 \frac{dx'}{dt} \omega \right] - Y' \right\} \delta y' \\ & \left. + \left\{ m \frac{d^2 z'}{dt^2} - Z' \right\} \delta z' \right] = 0 \end{aligned}$$

Jeśli bierzemy pod uwagę tylko jeden punkt masy, wtedy suma redukuje się do jednego składnika. Bnie-  
war nas  $\delta x', \delta y', \delta z'$  oznaczają nam przesunięcia przy-  
gotowane, dowolne więc były tylko zgodne z warunka-  
mi ruchu, przeto rozumowanie to może zachodzić, gdy

każdy z nawiasów znika. Dostajemy tak trzy równania ruchu:

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{X'}{m} + x' \omega^2 + 2\omega \frac{dy'}{dt}$$

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = \frac{Y'}{m} + y' \omega^2 - 2\omega \frac{dx'}{dt}$$

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = \frac{Z'}{m}$$

Łącząc, że masa  $m=1$  napiszemy te równania jeszcze prościej:

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = X' + x' \omega^2 + 2\omega \frac{dy'}{dt}$$

$$(I). \quad \frac{d^2 y'}{dt^2} = Y' + y' \omega^2 - 2\omega \frac{dx'}{dt}$$

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = Z'.$$

Równania te są różne od równań ruchu dla swobodnego punktu wyprowadzonych dla układu nieruchomego.

W układzie statym jest bowiem:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = Y$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = Z$$

Widzimy więc, że pierwsze składniki po prawej stronie

rownian (I) nakrywają się. Jakże jest oznaczenie dalszych składników? Składniki mające  $\omega^2$  wyrażają siły składowe jakiejś siły dodatkowej. Wypadkowa tych sił

$$\omega^2 \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{\omega^2 r^2}{2} = \frac{v^2}{r}$$

jest po prostu siłą odśrodkową.

Nieco bliwniejszy kształt mają składniki zawierające  $\omega$ . Przedstawiają one znowu oczywiście jakąś siłę dodatkową, powstałą skutkiem obrotu. Siłę tę nazywamy siłą Coriolisa. Wpływ jej jest w różnych przykładach dosyć ciekawy. Gdy przyjmiemy że widzimy tylko układ ruchomy to siła ta proporcjonalna do prędkości  $\omega$  ma raz kierunek zgodny drugi raz przeciwny do sił składowych.

Rozpatrzmy wpływ tych sił na ruch punktu na powierzchni ziemi. Siłę odśrodkową można połączyć z siłą ciężkości, bo siła ta ma potencjał.

$$U' = \frac{x'^2 + y'^2}{2} \omega^2$$

$$\frac{\partial U'}{\partial x'} = x' \omega^2 \quad \frac{\partial U'}{\partial y'} = y' \omega^2$$

Wprowadzając tedy oznaczenia:  $X' + x' \omega^2 = (X')$ ,



$Y' + y'^2 = \textcircled{Y'}$ , mamy:

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \textcircled{X'} + 2\omega \frac{dy'}{dt}$$

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = \textcircled{Y'} - 2\omega \frac{dx'}{dt}$$

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = \textcircled{Z'}$$

Dobierzemy jeszcze odpowiednio układ współrzędnych.

dla ziemi. Niech osią  $z$  będzie oś obrotu ziemi, oś  $x$  niech

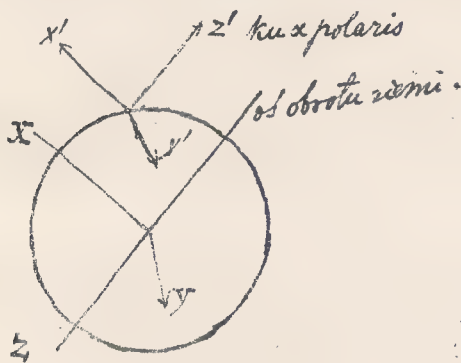


Fig 153.

będzie w płaszczyźnie rysunku, oś  $y \perp$  do płaszczyzny rysunku.

Układ ten poruszający się wykonuje wraz z ziemią obrót.

Nożemy go przenieść na powierzchnię ziemi. Oś  $z' \parallel z$

skierowana będzie do  $\alpha$  polaris,  $x' \perp z'$ ,  $y'$  oznacza kierunek wschodu. Wyobrażamy sobie teraz że układu stałego nie widzimy i wprowadzamy na miejsce ostat-

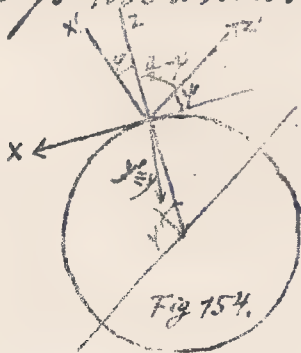


Fig 154.

niego układu jeszcze jeden nowy który oznaczmy sobie  $x y z$ ; niech on ma początek na powierz-

chui ziemi w tem sam zresztą miejscu gdzie poprzedni  
pod  $\psi$  szerokości geogr. W tym nowym układzie niech  
os'  $y \equiv y'$ , os'  $z$  niech będzie pionem, os'  $x$  a'  $x \perp z$  i  $\perp y$ .  
Os'  $x$  zatem będzie leżała w poziomie i skierowana będzie  
na południe, a z poprzednią osią  $z$  tworzyć będzie kąt  
 $\psi$ . Wzory transformacyjne tych układów będą:

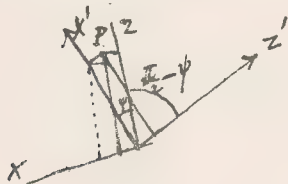


Fig 155

$$x = x' \sin \psi - z' \cos \psi$$

$$z = x' \cos \psi + z' \sin \psi$$

$$y = y'$$

Kutkiem przyjęcia takich układów siły zewnętrzne  
odniesione do jednego gramu okrusić się:

$$(X') = -g \cos \psi$$

$$(Y') = 0$$

$$(Z') = -g \sin \psi$$

Wstawiając to, dostajemy:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x'}{dt^2} \sin \psi - \frac{d^2 z'}{dt^2} \cos \psi = (X') \sin \psi - (Z') \cos \psi +$$

$$+ 2\omega \left( \frac{dy'}{dt} \sin \psi \right) = -g \cos \psi \sin \psi + g \cos \psi \sin \psi + 2\omega \frac{dy'}{dt} \sin \psi$$

Tak dostajemy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \frac{dy}{dt} \sin \varphi$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega \frac{dy}{dt} \cos \varphi$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega \frac{dx}{dt}$$

czyli sprowadzając te równania do współrzędnych jednego tylko układu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \sin \varphi \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega \left( \sin \varphi \frac{dx}{dt} + \cos \varphi \frac{dz}{dt} \right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega \cos \varphi \frac{dy}{dt}$$

Łą to więc równania różniczkowe ruchu punktu swobodnego poruszającego tylko pod wpływem ciężkości. Łą one całkiem odmiennie niż dla ziemi nieruchomej. Całkowanie tych równań da się przeprowadzić ściśle, ale w tym wypadku wystarczy pewne przybliżenie. Zauważymy w tym celu, że  $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60}$  wielkość rzędu  $10^{-4}$ , wielkość mała w porównaniu do  $g$ . Stąd będziemy  $\omega^2$  odrzucać.

Równania pierwsze i trzecie całkujemy bezpośrednio

Mechanika Ark XXXIV.



$$\frac{dx}{dt} = \alpha + 2\omega \sin \varphi \cdot y$$

$$\frac{dy}{dt} = y - gt + 2\omega \cos \varphi \cdot y \quad \alpha, \gamma \text{ stałe całk.}$$

Wstawiając to do równania drugiego, mamy:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -2\omega (\alpha \sin \varphi + y \cos \varphi - gt \cos \varphi)$$

[ $\omega^2$  odrzucone].

$$\frac{dy}{dt} = \beta - 2\omega t (\alpha \sin \varphi + y \cos \varphi) + \omega g t^2 \cos \varphi$$

$$y = y_0 + \beta t - \omega t^2 (\alpha \sin \varphi + y \cos \varphi) + \frac{\omega g t^3}{3} \cos \varphi,$$

Kładąc  $y_0 = 0$  mamy

$$(a) \quad y = \beta t - \omega t^2 (\alpha \sin \varphi + y \cos \varphi) + \frac{\omega g t^3}{3} \cos \varphi.$$

Wstawiając teraz to równanie do dwóch poprzednich, i odrzucając składniki zawierające  $\omega^2$  dostaniemy:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha + 2\omega \sin \varphi \cdot \beta t$$

$$\frac{dz}{dt} = y - gt + 2\omega \cos \varphi \cdot \beta t.$$

całkując zaś je, dostaniemy:

$$(b) \quad x = \alpha t + \omega t^2 \beta \sin \varphi.$$

$$(c) \quad z = \gamma t - \frac{gt^2}{2} + \omega t^2 \beta \cos \varphi.$$

Tak więc dostaliśmy trzy równania: (a), (b), (c) odniesione do układu wirującego jednostajnie wraz z ziemią.

mia, określające nam ruch punktu materialnego, poruszającego pod wpływem ciężkości.  $\alpha, \beta, \gamma$  są stałe całkowania,  $\psi$  szerokość geograficzna. Przez dobór stałych  $\alpha, \beta, \gamma$  można równania (a)(b)(c) specjalizować:

1. Powiemy najpierw, że ciała spada bez prędkości początkowej tj.  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Równania (a)(b)(c) przejdą wtedy na takie:

$$x = 0$$

$$y = \frac{\omega g t^3}{3} \cos \psi$$

$$z = -\frac{g t^2}{2}$$

Ciała więc według tych równań zbaczają w czasie swobodnego spadania na wschód i to proporcjonalnie do 3<sup>ciej</sup> potęgi czasu. Pozostaje to w związku z tem,

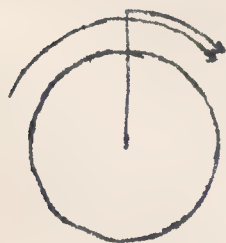


Fig 156.

że prędkość styczna w wyższych warstwach ziemi jest większa niż w niższych. Zboczenia owe dają się stwierdzić doświadczeniem. Próby tego były już za

czasów Newtona, potem fizycy stacy starali się to

uskućenić bez powodzenia, bo przeszkadzały temu prądy powietrza. Najdokładniejsze doświadczenie zrobił Reich we Freibergu w Saksonii z początku 9. wieku. badając swobodne spadanie ciała w srybie głębokim na 1585 m,  $\varphi = 50^{\circ}24'$ . Ochylenie wynosiło  $\gamma = 284$  cm. Ze wzoru powinno wypaść 275 cm. Błąd zatem 1 mm jest całkiem nieznaczny.

2. Gdy rozpatrujemy ruch ciała wyrzuczonego w kierunku poziomym na południe tj. w kierunku  $x$ , natenczas  $\alpha$  oznacza prędkość, z jaką ciało wyrzuciliśmy,  $\beta = \gamma = 0$ .

Wtedy

$$x = \alpha t$$

$$y = -\omega t^2 \alpha \sin \varphi + \frac{\omega g t^3}{3} \cos \varphi$$

$$z = -\frac{g t^2}{2}$$

W wyrażeniu na  $y$  występuje teraz jeszcze nowy człon o znaku ujemnym. Oznacza to, że ciało będzie niecorzacać na zachód. Gdybyśmy wyrzucili ciało na północ, wtedy  $+\alpha$  przejść na  $-\alpha$  ciało więc znówu zbaczać będzie na wschód. Zbożenia te ze względu, że dla  $t < 1$   $t^2$  i  $t^3$  są znaczniejsze z początku.



Przyjmijmy terazobie ciało wystrzelone na wschód.

$$\beta \neq 0, \quad \alpha = \gamma = 0$$

Wtedy:

$$x = \omega t^2 \beta \sin \gamma$$

$$y = \beta t + \frac{\omega g t^3}{3} \cos \gamma$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + \omega t^2 \beta \cos \gamma$$

Pierwsze równanie wskazuje, że ciało zbaczycie nieco na północ. Gdybyśmy znów wystrzelili ciało na zachód to  $+\beta$  przeszłoby na  $-\beta$ ; ciało zbaczaloby na południe. Widać więc, że jakkolwiek bądź wystrzelimy ciało na półkuli północnej (to założenie kładzie w doborze szerokości geograficznej  $\gamma$ ) to ono zawsze zbaczacie będzie na prawo. Zwróćmy tu uwagę na określenie geograficzne. R.



Fig 157.

wietrze napływające do minimum barometrycznego tworzy wiry, zbaczające na półkuli północnej na prawo. Na półkuli południowej jest odwrotnie. (Dove'sches

Windgesetz). Twierdzono nawet, że to zbachanie uwidacznia się także w biegu rzek. Baer twierdzi, że rzeki podmy-

W tym celu należy więcej prawy brzeg niż lewy. Skąd też ten fakt podlega jeszcze dyskusji, bo rzeczywiste czynniki powodujące to zstąpienie na prawo jest nadzwyczaj słaby.

W wyrażeniu na  $x$  wchodzi jeszcze składnik  $\omega \sin \varphi$  powodujący zmniejszenie spadania w kierunku pionowym. Wpływ jego jednak jest bardzo nieznaczny.

Ruch wahadła na ziemi obracającej się.

Niech zdania sobie sprawy z ruchu wahadła, gdy uwzględnimy obrót ziemi możemy wziąć formy Lamberta itp., ale można też z góry przewidzieć, o ile równania dla wahadła różnić się będą od równań punktu swobodnego, przez to, że dodamy jeszcze warunki przymusowe, jakim punkt wahadła musi podlegać:

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

W myśl tego równania dla punktu swobodnego (str. 263) z uwzględnieniem obrotu ziemi przejdą na następujące równania dla wahadła:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -2\omega \sin \varphi \frac{dy}{dt} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\omega(\sin\psi \frac{dx}{dt} + \cos\psi \frac{dz}{dt}) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{dz}{dt} = -g + 2\omega \cos\psi \frac{dy}{dt} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Gdyż warunek  $\varphi(x,y,z)=0$  będzie oznaczał, że punkt na  
zostawać na powierzchni kuli:

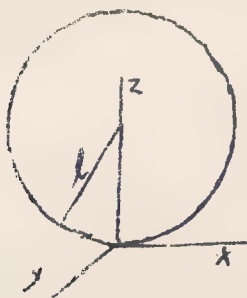


Fig 158.

$$\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-l)^2 - l^2 = 0$$

Stąd:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2(z-l).$$

Równania więc wyrażnie wypisane będą:

1.  $y$

$$\frac{dx}{dt} = 2\omega \sin\psi \frac{dy}{dt} + \lambda x$$

2.  $x$

$$\frac{dy}{dt} = -2\omega \sin\psi \left( \frac{dx}{dt} + \cos\psi \frac{dz}{dt} \right) + \lambda y$$

3.

$$\frac{dz}{dt} = -g + 2\omega \cos\psi \frac{dy}{dt} + \lambda(z-l)$$

Mnożąc je odpowiednio przez  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  i dodając  
do siebie:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = -g \frac{dz}{dt}$$



...nie to przekładowe nie prawo zachowania energii:

$$\frac{V^2}{2} = -gz + H$$

H stała const. Zauważymy, że siła Coriolisa zanika w tym wyrażeniu. Możnaaby o tej sile ogólnie dowieść, że nie wykonuje ona pracy.

Pomnożymy teraz pierwsze równanie przez  $y$ , drugie przez  $x$  i odejmijmy drugie od pierwszego:

$$y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega \sin \psi (y \frac{dy}{dt} + x \frac{dx}{dt}) + \cancel{2\omega x \cos \psi \frac{dx}{dt}}$$

Siła  $z$  jest mała w porównaniu do  $x$ , to możemy ostatni składnik pominąć, tak że dostaniemy:

$$\frac{d}{dt} (y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}) = \omega \sin \psi \frac{d}{dt} (x^2 + y^2)$$

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = C + \omega (x^2 + y^2) \sin \psi$$

Wpuszczając ten w równanie zachowania energii składnik  $(\frac{dx}{dt})^2$  z tego samego powodu, co wyżej, dostajemy dwa równania, wystarczające do opisanie ruchu wahadła:

$$(\alpha) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -2gz + H$$

$$(3) \quad y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = C + \omega(x^2 + y^2) \sin \varphi.$$

W dalszym ciągu wprowadzimy odpowiednie biegunowe:

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

a z wykrętuje się przy pomocy równania kuli: jest bowiem

$$x^2 + y^2 + (l - z)^2 = l^2$$

$$x^2 + y^2 - 2lz + l^2 = 0$$

( $z$  znikła w porównaniu do innych członów).

Równania (1)(3) uprości się, gdy zwozimy, że

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = -r^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

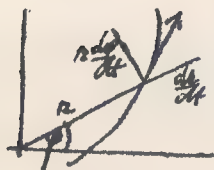


Fig 159.

do postaci:

$$(1') \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{l} r^2 + H$$

$$(3') \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C - \omega r^2 \sin \varphi$$

Równanie (3') wypróżnia, gdyby nie było drugiego członu, prawo, że prędkość wycinkowa jest stała. Od tego członka można się uwolnić za pomocą transformacji:

$$\Phi = \varphi + \omega t \sin \varphi$$

( $\varphi$  szerokość geogr.)

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} + \omega \sin\varphi.$$

$\varphi$  jest stałe, o ile uwzględnimy wachnięcia o małej amplitudzie.

Stąd  $r^2 \frac{d\Phi}{dt} = r^2 \omega \sin\varphi = C = \overline{r^2 \omega \sin\varphi}$

czyli  
( $\beta''$ )  $r^2 \frac{d\Phi}{dt} = C \quad (\text{const}).$

a więc istotnie w tym nowym układzie prędkość wycinkowa jest stała. Taką relację wyprowadziliśmy już wyżej, gdyśmy omawiali ruch wahadła bez uwzględnienia obrotu ziemskiego.

Wstawmy teraz w wzór transformacyjny płaszczyzny równanie (d'). Będzie:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 &= H - \frac{g}{2} r^2 + 2\omega r^2 \frac{d\Phi}{dt} \sin\varphi - \omega^2 r^2 \sin^2\varphi \\ &= H - \frac{g}{2} r^2 + 2\omega C \sin\varphi - \omega^2 r^2 \sin^2\varphi \end{aligned}$$

Pomijając człon ostatni z powodu unikomo małego  $\omega^2$  i skracając wielkości stałe w jeden wyraz  $h$ , dostajemy:

( $\alpha''$ )  $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 = h - \frac{g}{2} r^2$

czyli wobec  $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{C}{r^2}$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = h - \frac{g}{2} r^2$$



Równania ( $\alpha''$ ) i ( $\beta''$ ) są takie same jak równania w spitzrzednych biegunowych wahadła bez uwzględnienia obrotu ziemskiego (Porównaj str 107 (a) i (b)), przy ograniczeniu się oczywiście do małych wychyleń.

Różniczkując ( $\alpha'$ ) dostajemy:

$$2\left(\frac{dr}{dt}\right) \frac{d^2 r}{dt^2} - 2 \frac{c^2}{r^3} \left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{2g}{R} r \left(\frac{dr}{dt}\right) \quad \text{czyli}$$

$$\underbrace{\frac{d^2 r}{dt^2}} - r \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{R} r$$

Wyrazienie po lewej stronie oznacza przyspieszenie w kierunku promienia wodzącego (str 78). Z prawej strony tegoż równania widzimy, że przyspieszenie to jest proporcjonalne do wychylenia. Siła zatem ma charakter siły sprężystej, i ruch przeto, wahadła będzie się odbywał tak, jakby na masę jego działała siła sprężysta. Będzie to zatem ruch harmoniczny. Punkt materialny porusza się będzie naokoło po elipsie. Okres wahania będzie, jak zwykle,  $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$ .

Zwróćmy się obecnie znowu do wzoru transfor-

masyjnego :

$$\Phi = \varphi + \omega t \sin \psi$$

i zapytajmy, co on wyraża. Kąt  $\varphi$  oznacza odchylenie rantu nitki wahadła na płaszczyźnie poziomej od kierunku południowego  $x$ . Położmy  $\varphi = \text{const}$  tj. założmy, że wahania odbywają się w płaszczyźnie.

$\omega \sin \psi$  jest wielkością stałą ( $\psi$  szerokość geogr.) Równanie tedy powyższe oznacza, że płaszczyzna wahań wiruje z prędkością jednostajną około pionu. Prędkość ta wynosi mianowicie  $\omega \sin \psi$ .

Mozna to zademonstrować najlepiej w ten sposób, że się elipsę degeneruje w prostą, co łatwo zrobić; wystarczy bowiem wychylić masę wahadła i puścić ją. Przytwar-



Fig 160

zamy ewentualnie kołec do tej masy będzie zakreślał jak płaszczyznę względnie pewną krzywizną na płaszczyźnie poziomej. (Fig 160).

Historycznej wagi takie doświadczenie zrobił Foucault w kopule panteonu w Paryżu jako dowód obrotu ziemi

koło swej osi.

Doświadczenia te należą do trudniejszych z powodu długości czasu, jaki na doświadczenie trzeba użyć, i wpływów zewnętrznych, jak wiry powietrza, wstrząsanie itp. W szerokości geograf.  $\varphi = 50^\circ$  przesaczyona wahaniem obrotu mniej więcej o  $180^\circ$  tj.  $15^\circ - 20^\circ$  na godz.

Z punktu widzenia logicznego z doświadczenia Foucault'a nie wynika bynajmniej, że ziemia się obraca koło swej osi, bo rozumowanie opiera się na tem, że równania mechaniki:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{X}{m}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Y}{m}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Z}{m}$$

są ściśle. Gdyby atoli był Newton równania swe wyprowadził drogą ściśle empiryczną to nigdyby takiego kształtu być nie dostał. Gdyby się natomiast doświadczenia bardzo ściśle robiło, to doszłoby się do równań z pierwszymi stałemi  $\alpha, \beta$  zależnemi od szerokości geograficznej kształtu takiego:



$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m} + \alpha \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m} - \alpha \frac{dx}{dt} - \beta \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m} + \beta \frac{dy}{dt}$$

gdzie  $\alpha = 2\omega \sin\varphi$ ,  $\beta = 2\omega \cos\varphi$ . Póki mając równania Newtonowskie suponujemy, że składniki tych równań nie wchodząc w równania Newtona, pochodzą z sił działających koło osi swojej. Moglibyśmy atoli nie robiąc wcale tej supozycji, (co by miało najprawdopodobniej miejsce gdybyśmy równania Newtona nie mieli, a mieli tylko równania ostatnie), te ostatnie równania uważać za zasadnicze, a o obrocie ziemi niebysmy nie wiedzieli. Może kształt tych równań byłby nieco dziwny, bo nie tak prosty jak równań poprzednich. Z punktu jednak logicznego zjawiska nie muszą się wyrażać najprostszy mi równaniami. Tak więc nie mamy żadnego logicznego dowodu obrotu ziemi koło osi, a przyjmujemy to dla prostoty.

W fizyce i w ogóle w naukach przyjmuje się chętnie hipotezy te, które są proste. Dawniej mówiono, że czyni się to dlatego, bo prawa przyrody są proste. Nie da się to jednak dowieść. Mach tedy powiada, że dlatego przyjmujemy hipotezy proste, bo jest nam przez to najwygodniej rachować (nominalizm). Jest w tem zawartości poniekąd supozycja, że prawa istniejące w przyrodzie wcale nie są proste. Prawdopodobnie rzeczywistość jest pośrednia. Szukamy najprostszych form, bo umysł ludzki je najłatwiej obejmuje. W innych naukach jednak nie ma tak praw prostych. Np. chemia jest to lekajkon praw, które atoli nie są ani bardzo ścisłe ani bardzo proste. Że w fizyce dadzą się takie prawa proste wywnioskować, to musi polegać na jakiejś obiektywnej wartości.

Newton, doszedł do swoich równań na podstawie obserwacji astronomicznych. Keplera. Możliwe, że do nich dopęć tej drogi logicznej, gdyby się miało równania dla ruchu punktu swobodnego na ziemi i to przez odpowiednią transformację. Powiedzi-

Koby się wtedy, że równania tak strzymane odnoszą się do układów zmiennego. Przyjąć to byłoby bardzo hipotetyczne lecz uzasadnione, byłoby właśnie prostą tą wyrażeni.

Kwestye tu poruszone naprowadzają nas na zasadę względności. Równania Newtonowskie odniesione do jakiegobądź układu zmieniają się, gdy na miejsce dawnego układu wprowadzimy nowy poruszający się ruchem jednostajnym prostoliniowym względem pierwszego. Wady bowiem jest:

$$x = x' + at$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2} = X$$

$$y = y' + pt$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2} = Y$$

$$z = z' + yt$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2} = Z$$

Zjawiska tedy odbywają się niezależnie względem ruchu jednostajnego prostoliniowego. Nie można tego jednak już wliczyć do ruchów protowych. Tu bowiem już zachodzi zmienny. Ta zasada względności znana już od czasu Newtona została uogólniona



i doszło się tak do rewiryzji pojęcia „czasu”.

Od kilkunastu lat starano się na polu elektrodynamiki i optyki określić ruch ziemi względem eteru, który uważano za stały. Według dawnej elektrodynamiki (H. Hertz) ruch względem eteru powinien się dać wykazać. Natomiast doświadczenia Michelsona bardzo precyzyjne wykazały, że orientacja ziemi nie wpływa wcale na przebieg zjawisk świetlnych i elektromagnetycznych w eterze. Przebieg zatem tych zjawisk odbywa się tak samo dla obserwatora w spoczynku jakoteż w ruchu prostoliniowym jednostajnym. Aż do wynioskowano, że kształt równań opisujących ruch jest niezależny od ruchu układu prostoliniowego. Mniej więcej 7 lat od czasu Einsteina przyjęto tę zasadę w całej fizyce. Przyczyniło się do tego ta okoliczność, że fakty dawne przedstawiają się według tej tezy prościej. Ale tei wszystkie zjawiska ruchu przedstawiają się według tej zasady całkiem odmiennie niż w fizyce dawnej.

Zasadniczą tu rolę jest względność czasu. Dawniej  
Mechanika Art. XXXVI.

przyjmuwano wspólny czas; w reformowanej zasadzie przyjmuje się indywidualny czas dla różnych systemów. Można tylko określić różnicę czasu dostrzeżanego w jednym punkcie od czasu dostrzeżanego w innym, jeśli znamy odległości i ruchy względny tych punktów.

Zasady względności nie będziemy tutaj rozważać, bo zajęłyby nam to dwa tomy. Wspomniemy tylko, że według tej zasady jest np. czas dla stojącego człowieka inny niż dla poruszającego się. Praktycznie nie jest to dostrzegalne, bo wpływ ruchu na zmianę czasu jest ogromnie mały przy prędkościach nie zbyt wielkich. To też dla zwykłej mechaniki zasada względności ma tylko teoretyczne znaczenie, warte tylko tego, że okazuje, że prawa Newtona są tylko przybliżeniem.

Tak więc dawniej uważano masę m. za całkiem niezmienną, nie zależną ani od ruchu ani od sił. Nowej mechanice masa jest zmienna zależna od ruchu i zmiennie zależnie od sił odpowiednio do tego, czy to przesunięcie czy w kierunku promienia wodzącego na nie działają. Mamy tak dwa określenia masy:

Jeśli do masy  $m$  możemy przyczepić siły działające w kierunku stycznym to masę określamy jako longitudinalną.

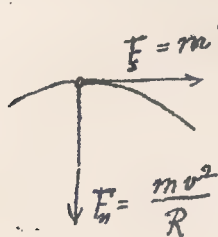


Fig 161.

$$m_l = \frac{F_s}{\frac{dv}{dt}}$$

Jeśli natomiast siły możemy przyczepić w kierunku promienia krzywizny, to masę taką nazywamy transversalną:

$$m_n = \frac{F_n}{\frac{v^2}{R}}$$

W dawnej mechanice zakładano:

$$m_l = m_n = m$$

W nowej natomiast kładkie się:

$$m_l = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} ; \quad m_n = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

gdzie  $v$  oznacza prędkość poruszającego się ciała,  $c$  prędkość światła. Przy małych  $v$  jest to poprawka zanikoma. Zakładając np  $v = 100 \text{ km/s}$ ,  $c = 300\,000 \text{ km/s}$  mamy z rozwinięcia:

$$m_n = m \left[ 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right]$$



jako poprawkę a obłona drugiego:  $\frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3000})^2$  tj wiel-  
kość rzędu  $10^{-7}$ . Ale np. przy promieniach katodowych,  
których prędkość  $v$  zbliża się do  $c$  różnica jest już dostrze-  
galna. Można dla tych promieni w szeregościowości stwier-  
dzić wzrost na  $m_0$ . Zmierzano się w tym celu promienie  
Katodowe w polu magnetycznem i mierzyły się krzywizną  
drogi. Znane, gdy znamy natężenie pola magnetyczne-  
go i prądu. Stąd oznaczono stosunek  $\frac{e}{m}$ , gdzie  $e$   
oznacza ładunek cząstki  $m$ . Stąd wynika zmienność  
 $m$ . Pierwszego natomiast wzoru na  $m_0$  nie udało się  
dotychczas stwierdzić. (Doświadczenia Kaufmanna, Rü-  
chsera i Slepki).

Wobec tych faktów zmienia się oczywiście cała mecha-  
nika: np. prawo składowania sił nie jest ściśle prawdziwe;  
jest tylko przybliżeniem. Dochodzi się wogół do wyników  
bardzo dziwnych; nawet prędkości nie wolno składować w pra-  
dopodobieństwo. Stwierdza się, jeśli się składowa prędkości, to nigdy  
nie można otrzymać na wypadkową większej prędkości

nieprzekroś światła. Rozważania te wchodzi już do zakresu teorii elektromagnetycznej.

Praktyczne zagadnienia mechaniki mogą pozostać w dotychczasowej formie.

Tak wyzerpaliliśmy niektóre mechaniki punktu i mechaniki ciał sztywnych. Przechodzimy więc do dalszego ciągu do mechaniki ciał sprężystych.

## Mechanika ciał sprężystych.

Rozważanie ciał sprężystych stanowi dalszy ciąg stopniowych przybliżeń. Powiedzieliśmy na samym początku, że gdy obserwujemy ciało niebieskie kolosalnie odległe, to będzie ono dla nas punktem. Pod uwagę bierzemy tu tylko ruch środka masy; ruchy obrotowe nie mają znaczenia na nasz wpływ. Jeśli interesuje nas też ruchy obrotowe, to należy to już do zakresu mechaniki ciał sztywnych. Jeśli zaś bierzemy pod uwagę deforma-

macie ciała, to rozważania te stanowią treść mechaniki ciał sprężystych.

Trzy te stopnie przybliżenia stosują się np. do opisu ruchu ziemi. Ziemię będziemy uważać za punkt, gdy chodzić nam będzie o jej ruch koło słońca, za ciało sztywne, gdy zważamy jej ruch obrotowy koło osi, zaś za ciało sprężyste, gdy uwzględnimy przepływy i przepływy nawa, zjawiska geologiczne takie jak np. że Norwegia od czasów stopienia lodów skutkiem ubytku stamtąd wielkiej ilości masy podniosła się o 300 m itp. Wogóle ziemia posiada sprężystość taką jak stal.

Ciała wogóle możemy podzielić na dwie klasy: na ciecze i ciała sprężyste:

Ciecz jest to ciało, które nawet pod działaniem choćby najmniejszej siły stycznej do powierzchni jest wprowadzone w ruch. Aby w cieczy istniała równowaga muszą siły być normalne do powierzchni cieczy.

Ciała sprężyste wytrzymują siłę styczną, jeśli ona nie jest zbyt duża, nie nabywają ruchu i utrzymują



miją stan równowagi.

Napięcie (nateżenie, prężność, ciśnienie). Wyobraźmy sobie wewnątrz ciała jakibądź przekrój. Nazywamy napięciem taką siłę, jaką trzeba przycisnąć na każdej jednostce przekroju, aby ciało zostało w równowadze. Przykład: Obciążymy nitkę konczarkową ciężarkiem  $P$ . Co tu będzie napięciem? Wyobraźmy sobie, że nitkę przecinamy. Skutkiem tego górna jej część skurczyłaby się. Aby to nie nastąpiło, trzeba w tym przekroju przycisnąć pewną siłę = napięcie. Jeśli nitka jest bardzo cienka i lekka, to napięcie stanowi tu



Fig 162.

Siła  $P$ .

Wydłużenie. Można by się spytać, jaki wpływ ma siła na zmianę długości ciała, wydłużenie. Hipotetycznie można powiedzieć, że długość ciała zależy od siły  $F$ :

$$l = f(P)$$

Funkcję tę uwarujemy za cięgła (natura



Fig 163.

non facit saltus) i możemy tedy, stosując rozwinięcie Maclaurina napisać:

$$l = f(0) + P \left( \frac{\partial f}{\partial P} \right)_0 + \frac{P}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \right)_0 + \dots$$

Ograniczając się do wyrażen' małych i odcinając składniki dalsze, dostajemy:

$$l = f(0) + P \left( \frac{\partial f}{\partial P} \right)_0$$

Stąd  $f(0)$  wyznaczymy z warunku, że dla  $P=0$  jest  $l=l_0$ . Stąd:

$$l = l_0 + P \left( \frac{\partial f}{\partial P} \right)_0$$

Co do czynnika  $\left( \frac{\partial f}{\partial P} \right)_0$  postawimy pewne hipotezy, a mianowicie:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial P} \right)_0 = \frac{l_0}{2E}$$

przez co chcemy powiedzieć, że wydłużenie przy jednakowych siłach jest proporcjonalne do długości a odwrotnie proporcjonalnie do przekroju.  $E$  oznacza współczynnik tzw. moduł Younga. Stąd dostajemy:

$$\frac{l-l_0}{l_0} = \frac{P}{2E}$$

Jest to zasadnicze prawo teorii sprężystości, wypro-  
wiedzione przez Hooke'a 1676: *ut tensio sic vis*.  
Prawo to jest ważne dla odkształceń bardzo małych,  
mówimy, że stosuje się ono w granicach sprężysto-  
ści. Powiedzenie takie jest ogromnie niedokładne, bo  
granic takich właściwie nie ma.

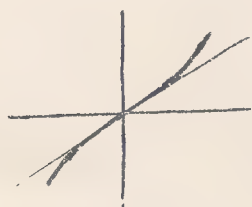


Fig 164.

Graficznie prawo Hooke'a przedstawi  
się mniej więcej tak jak wskazuje fig  
164, przyczem bezwzględna wartość mo-  
dulu wydłużeń i skróceń jest taka sama.  
Różnica zachodzi tylko co do znaku.

Teorię sprężystości starano się poprawić przez uwzględ-  
nienie wyższych potęg szeregu Maclaurina, ale nie  
wyszkało na tej drodze lepszego. Teoria poprawiająca na  
pierwszym członie daje pierwsze przybliżenie, ale jest ona  
tu jeszcze najlepsza.

Moduł  $E$  określa się według wzoru jako  $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ . Dla  
stali jest np.  $E = 20000 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  tzn. drut stalowy o prze-  
kroju  $q = 1 \text{ mm}^2$  obciążony 20000 kg wydłuży się o pierwot-



na swą długość. De facto możliwe jest wydłużenie drutu stalowego :  $\frac{l'-l}{l} = \frac{200}{20000} = 1\%$  i przerwanie jeszcze nie nastąpi. Moduł  $E$  ma zastosowanie techniczne. Dla celów fizyki określa go się w systemie (cgs). Aby z określenia technicznego przejść do (cgs), trzeba powyższą wielkość techniczną modułu pomnożyć przez:

$$10^3 \cdot 980 \cdot 10^2 \sim 10^8.$$

Dostanie się wtedy na  $E$  stosunek:  $\frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$ .

Jako że  $E = 7000$ , otrzymamy  $1900 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ .

Dotąd rozważaliśmy wydłużenie jakiegoś drutu, taki, jakoby napięcie w każdym przekroju było jednakowe. W ogólności tak jednak nie jest. Aby więc móc rozważać ten wypadek, gdy napięcie nie jest jednostajne, dążymy do praw elementarnych. Dla elementów normiarów stosowalne są prawa, jak gdy napięcie jest jednostajne. Tak więc przez prawa elementarne dojdziemy do zjawiska ogólnego, które uważać będziemy za złożone ze zjawisk elementarnych.

Uważajmy w drucie, który poddamy wydłu-

ienie, element  $dx$ . Po wykształceniu element ten wynosić będzie:  $(x' + u') - (x + u)$ . Stąd:

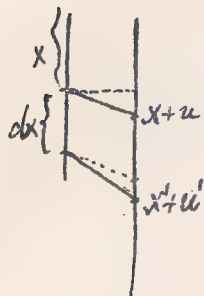


Fig 165.

$$\frac{(x' + u') - (x + u) - dx}{dx} = \frac{(x' - x) - dx + (u' - u)}{dx} = \frac{du}{dx}$$

gdzie wychylenie punktów:

$$u = f(x).$$

Stosując prawo Hooke'a mamy:

$$\frac{du}{dx} = \frac{F}{AE} = \frac{f}{E}$$

jeśli przez oznaczymy napięcie jednostkowe tj. przypadające na jednostkę powierzchni przekroju.

Tęś może być już to prawo różniczkowe stosować nawet do wypadków, gdy napięcie  $f$  nie jest dla wszystkich elementów jednakowe.

Kiedy, gdy napięcie owo jest jednakowe dla wszystkich elementów, to wracamy do dawnego prawa. Mamy wtedy:

$$u = \frac{f}{E} \cdot x + \text{Const}$$

$$u_{x=l} - u_{x=l_0} = \frac{f}{E} l.$$

Urzeczywistnienie napięcia niejednakowego napotyka-

my choćby w wypadku, gdy uwzględnimy sam ciężar nitki. Napięcie wzrasta proporcjonalnie do masy:

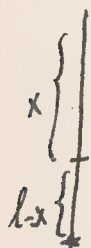


Fig 166

$$f = g\rho(l-x)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{f}{E} = \frac{g\rho(l-x)}{E}$$

$$u = \frac{g\rho}{E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

Wydłużenie końcowe:  $u = \frac{g\rho}{E} \frac{l^2}{2}$  tj.

$$\frac{l-l_0}{l_0} = \frac{g\rho l_0}{2E}$$

Zatem wydłużenie jest takie jak gdybyśmy pobawę masy przyrzepili przy końcu.

Podobnie można ten wypadek niejednostajnego napięcia uwzględnić, wyobrażając sobie, że drut wiruje. Siła odśrodkowa spełniać tu będzie funkcję napięcia.

Zauważyć tu trzeba dla ścisłości, że nie powinno się pisać właściwie:  $l-x$  na oznaczenie kawałka nitki branego pod uwagę bo  $l$  się wydłuża samo. Wielkość jednak wydłużenia jest wyższego rzędu w porównaniu do  $l$  tak, że możemy je opuścić.



## Deformacje kostki elementarnej.

a) Sprężystość objętościowa. Pomysłmy sobie osutę sprężystego wyciętą kostkę o długości boków  $a$ . i wyobraźmy sobie siły ciągnące na nią wywierane np. w kierunku osi  $x$ . Jedną z sił  $X_x$ .



Fig 167

Siły  $X_x$  (normalne do ścian kostki) powodują wydłużenie kostki. Rozentowe takie wydłużenie (na jednostkę długości)

wynosi w myśl prawa Hooke'a.

$$\frac{a' - a}{a} = \frac{X_x}{E}$$

( $X_x$  siła działająca na jednostkę powierzchni). Równocześnie z wydłużeniem kostki w jednym kierunku następuje skurczenie w innych kierunkach. Skurczenie to jest mniejsze. Wprowadzając czynnik Poissona  $\mu$  wyrazimy je w każdym z dwu pozostałych kierunków:

$$a - \mu(a' - a) = a(1 - \mu \frac{X_x}{E})$$

Pod wpływem siły  $X_x$  kostka elementarna zmienia swoją objętość  $Vol_0 = a^3$  na  $Vol'$ .

$$Vol' = a(1 + \frac{X_x}{E}) a(1 - \mu \frac{X_x}{E}) a(1 - \mu \frac{X_x}{E})$$

$$= a^3 [1 + (1 - 2\mu) \frac{X_x}{E} + \cancel{(\frac{X_x}{E})^2}]$$

Opuszczając składniki od  $(\frac{X_x}{E})^2$  porażwszy jako wielkości wyższego rzędu dostajemy:

$$Vol' = Vol_0 [1 + (1 - 2\mu) \frac{X_x}{E}]$$

czyli

$$\frac{Vol' - Vol_0}{Vol_0} = (1 - 2\mu) \frac{X_x}{E}$$

Dla  $\mu < \frac{1}{2}$  objętość się powiększa. Wartość  $\mu$  jest zawsze  $< \frac{1}{2}$ ; dla kauczuku, żelatyny  $\mu$  ma prawie wartość  $\frac{1}{2}$ .

Ogólnie czem większa sztywność postaciowa tem  $\mu$  jest mniejsze. Zbadać to można drogą Wertheima.

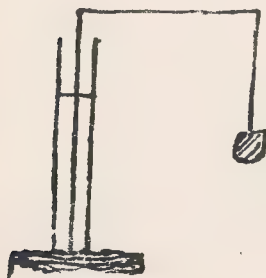


Fig 168

Cynk  $\mu$  znajduje się tu przez pomiary obniżenia ciężkiej zawieszki w rurce, w której wydmuchamy drut za pomocą odpowiedniego systemu dźwigniowego. Tak znalazł Wertheim wartość  $\mu = \frac{1}{3}$ . Wartość

wartości tego czynnika,  $\mu$  zawarte są w granicach 0.1...0.5.

Na tych podstawach zbudowano całą teorię sprężystości. Poczciwi pochodzą od Hooke'a, który ogólną wypracowali Navier i Poisson (1820). Punktem ich wyjścia było pojęcie molekuli, drobin. Podstawę tę potem wyeliminowano z teorii. Według Naviera i Poissona  $\mu = \frac{1}{4}$ , natomiast według  $\mu = \frac{1}{3}$ . Sprzecznosc tę rozstrzygnięto w ten sposób, że  $\mu$  jest indywidualne, zależne od natury odkształcanego ciała.

Teorii Poissona i Naviera było założenie, że siły międzydrobinowe są centralne. Byłoby to wtedy słuszne, gdyby molekuly miały kształt kul. Nie można atoli tego przesądzić i założenie to jako za ciążące trzeba z teorii usunąć. Tak samo trzeba postąpić z założeniem Naviera i Poissona, że molekuly są stałe. Mogą one bowiem poruszać się.

Obecnie opieramy się przy wyprowadzeniu teorii sprężystości na następujących faktach doświadczalnych:

- 1° Okształcenie jest proporcjonalne do siły  $P$ .
- 2° Jeśli odkształcenie jest skutkiem kilku sił równo



czymy, to jest ona superpozycja odkształceń się poszczególnych.

Zasada superpozycji odkształceń jest hipotetyczna. Tymczasem ona w razie wydłużenia w tym samym kierunku skierowanego z prawa Hooke'a i naodwrot prawo Hooke'a wynika z niej jako szczególny przypadek. Możemy bowiem tak rozumieć, jeśli prawo Hooke'a jest ważne, to drut obciążony np. jednym kilogramem wydłuży się o  $\varepsilon$ , skutkiem zaś obciążenia 2 kilogramami wydłuży się o  $2\varepsilon$ . Ale przyjmując zasadę składania sił, mamy już co iżo zasadę składania odkształceń; istotnie, to powiada, że ciążo połączona z 2 kilogramów wzajemnie się wydłużając o  $\varepsilon$ , ma w całości wydłużyć się o  $2\varepsilon$ .

Nadto przyjmijmy teraz, że wydłużenie nie następuje według prawa Hooke'a lecz według innego prawa np.

$$\frac{du}{dx} = \frac{p}{E} + ap^2$$

$$\frac{du'}{dx} = \frac{p'}{E} + ap'^2$$

Superpozycja tych odkształceń daje:

$$\frac{d(u+u')}{dx} = \frac{p+p'}{E} + a(p^2 + p'^2)$$

To jednak nie da się nakreślić tak jak wyżej wypowiedziane prawo superpozycji.

Prawo superpozycji jest ogólniejszą kaskadą niż prawo Hooke'a, gdyż stosuje się do deformacji różnych rodzajów.

Wyżej wyprowadziliśmy wzór na deformację objętościową kostki elementarnej o boku  $a$  pod wpływem siły normalnej  $X_x$  działającej w kierunku osi  $x$ . Niech teraz na tę kostkę działają jeszcze inne siły normalne  $Y_y, Z_z$ , odkształcające ją, przy czem jednak kostka ma pozostać w równowadze. Skutkiem tego ostatniego warunku wszystkie wspomniane siły muszą być równe co do wielkości bezwzględnej,  $= p$ . Pod wpływem jednej z nich odkształcenie kostki przedstawia się:

$$\frac{Vol' - a^3}{a^3} = \frac{p}{E} (1 - 2\mu)$$

Pod wpływem zaś wszystkich trzech na mocy prawa superpozycji deformacja objętościowa kostki przedstawia się oczywiście:

$$\frac{a'^3 - a^3}{a^3} = \frac{3p}{E} (1 - 2\mu)$$

Wprowadzając moduł objętościowy (Tolumenmodul):

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

możemy odkształcenie objętościowe kostki wyrazić:

$$\frac{a'^3 - a^3}{a^3} = \frac{p}{K}$$

Analogiczny wzór mamy w hydrodynamice na zmianę gęstości cieczy pod wpływem ciśnienia:

$$\rho = \rho_0 [1 + p\delta].$$

Różnica polega w tym, że przy odkształceniu objętościowym kostki mówiliśmy o ciągnięciu, teraz mówimy o ciśnieniu; powoduje to zmianę znaku tj:  $p\delta = -\frac{p}{K}$

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{p}{K}\right]$$

gdzie ścisłość  $\delta = \frac{1}{K}$ . Pomniżej, jak widzieliśmy,  $E$  jest wielkością 4<sup>go</sup> rzędu, gdy bierzemy pod uwagę stosunek  $\frac{H_g}{mm^2}$ , lub 6<sup>go</sup> rzędu, gdy uvažany stosunek  $\frac{H_g}{cm^2}$ , i pomniżej oczywiście  $K$  jest tego samego rzędu, więc ścisłość ciał stałych jest bardzo mała, rzędu  $10^{-6}$ . Ścisłość cieczy jest nieco większa  $\delta \sim 10^{-5}$ .



Pod wpływem rozważanych dotąd odkształceń zmienia się tylko objętość kostki, kształt nie. Stąd też pochodzi nazwa deformacja objętościowa, a sprężystość przy niej występującą nazywamy objętościową.

b) Sprężystość postaciowa. Weźmy teraz pod uwagę siły, które działają w kierunkach stycznych do ścian kostki elementarnej. Będą to siły np.  $X_y, Y_x$ . Jeśli ma być równowaga, to trzeba założyć,

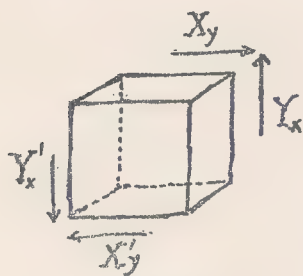


Fig 169.

że siły te są równe i nadto, że dołączone do siły  $X_y, Y_x$  równe sobie i poprzecznym, dnoszące moment wytworzony przez siły  $X_y, Y_x$ .

Mamy więc tutaj system sił, równych co do bezwzględnej wartości,  $= p$ . Jaki skutek tego systemu sił?

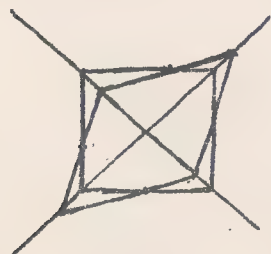


Fig 170.

Nastąpi wydłużenie kostki, jak to wskazuje przekrój kostki Fig 170, w kierunku jednej przekątnej, skrócenie zaś w kierunku drugiej. Ponieważ przy takim odkształceniu zmieniają się

Wtedy, skoro te boki można charakteryzować to określaniem.  
 Przekształcenia deformacji postaciowej można sprowadzić  
 do przekształcenia deformacji objętościowej. Wystarczy w tym



Fig 171.

celu wykreślić na uwzględnionym przekroju nowy kwadrat opisany na poprzednim o bokach prostopadłych do przekątnej poprzedniego i siły  $p$  skierowane do boków poprzedniego kwadra-

tu porządkować normalnie do boków kwadratu uproszczonego. Należy też siły składowe wynosić będzie oczywiście  $\frac{p}{\sqrt{2}}$ . Można je teraz będzie składować w sposób

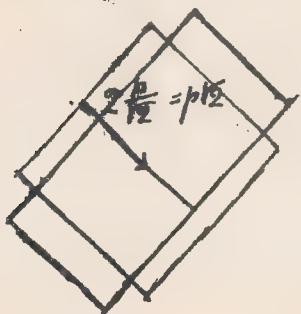


Fig 172

inny: równoległe co, dwie razem.

Można więc będzie powiedzieć, że na boki tego nowego kwadratu działają bieżące siły normalne

$2 \frac{p}{\sqrt{2}} = p\sqrt{2}$ . Jeśli bok kostki pierw-

otnej oznaczymy  $a$ , to bok uproszczonego kwadratu wynosić będzie oczywiście  $a\sqrt{2}$ .

W tym przypadku zatem na jednostkę wynosić będzie:

$$\frac{p\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{p}{a}$$

Kwadrat nowy deformuje się w sposób podany na rysunku tj. jedne boki wydłużają się, inne skracają.

Skutkiem siły przyciągającej wydłużenie będzie  $\frac{p}{E}$ , skrócenie zaś  $\mu \frac{p}{E}$ . Wartości zatem odkształcenie skutkiem siły przyciągającej będzie:

$$\varepsilon = \frac{p}{E} + \mu \frac{p}{E} = \frac{p}{E}(1+\mu).$$

Takie same będzie oczywiście odkształcenie skutkiem siły ściskającej.

Łącząc boki zdeformowanego kwadratu przedstawiają przekątne nowego pierwotnego przekroju kątów odkształco-nej parcie siły  $p$ . Odkształcenie te przekątne wynosić

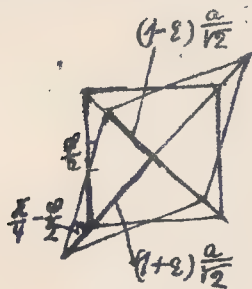


Fig 173.

będzie:

$$(1-\varepsilon) \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$(1+\varepsilon) \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Wróćmy tedy do odkształcenia pos-  
taciowego, powiemy:

$$\lg \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{(1-\varepsilon) \frac{a}{\sqrt{2}}}{(1+\varepsilon) \frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$



$$\lg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\lg \frac{\pi}{4} - \lg \frac{\varphi}{2}}{1 + \lg \frac{\pi}{4} \lg \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - \lg \frac{\varphi}{2}}{1 + \lg \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}. \text{ Stąd}$$

$$\lg \frac{\varphi}{2} = \varepsilon$$

Ponieważ kąty  $\varphi$  oznaczają kąty ogromnie małe, bo wogóle odkształcenia tylko bardzo małe rozważamy, przeto możemy pisać:

$$\frac{\varphi}{2} = \varepsilon$$

$$\varphi = 2\varepsilon$$

czyli

$$\varphi = \frac{2(1+\mu)}{E} \cdot p$$

Wprowadzając nasz symbol  $T$  jako moduł skręcenia, (Torsionsmodul)

$$T = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

możemy odkształcenie postaciowe kostki elementarnej wyrazić

$$\varphi = \frac{p}{T}$$

Zestawiając wzory na wydłużenie, odkształcenie objętościowe, odkształcenie postaciowe, widzimy stąd:

$$\text{Odkształcenie} \sim \frac{p}{E}, \frac{p}{K}, \frac{p}{T}.$$

Przy odkształceniu postaci objętość kostki zostanie niezmieniona. Widać to bez rachunku. Efekt bowiem przy nieściśnięciu matem ścieciu się kostki będzie ten, że ściany boczne nachyła się, podstawy zaś zostaną niezmienione. Górna



Fig 174.

tylko podstawa przesunie się równolegle do swej pierwotnej pozycji. Wysokość deformowanej kostki będzie taka sama.

Dotychczas rozważaliśmy odkształcenie kostki elementarnej przy założeniu równowagi i równości sił. Ograniczenie to jednak łatwo usunąć i wszystkie wogóle wypadki można zredukować do tutaj rozważanych.

Zakładając więc, że siły ciągnące  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $Z_z$  są różne, że więc skutkiem nich kostka nie będzie już dalej zostawać w równowadze, dostaniemy na odkształcenie objętości w kierunku  $x$  wzór:

$$\varepsilon_x = \frac{X_x}{E} - \mu \frac{Y_y}{E} - \mu \frac{Z_z}{E}.$$

Istotnie bowiem w kierunku  $x$  nastąpi wydłużenie kostki skutkiem siły  $X_x$ , skrócenie zaś skutkiem dwa

sił prozodotych  $Y, Z$ . Podobnie wyznaczmy odkształcenia  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Tak więc dostaniemy na odkształcenie objętościowe kostki następujące ogólne wzory:

$$\varepsilon_x = \frac{X}{E} - \frac{\mu}{E} (Y + Z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{Y}{E} - \frac{\mu}{E} (Z + X)$$

$$\varepsilon_z = \frac{Z}{E} - \frac{\mu}{E} (X + Y)$$

Kąty kostki nie ulegną, oczywiście, pod wpływem sił  $X, Y, Z$  żadnym zmianom.

Odpowiednio uogólniając, dadzą się wzory na ścinanie kostki przy odłączeniu warunku równowagi. Możemy przytem zakładać, że istnieje jakies siły zewnętrzne, działające na elementy objętościowe wewnątrz ciała np. grawitacja. Siły takie powodują tylko ruch postępowy. Jeśli poróżniamy zatem możliwość ruchów obrotowych kostki

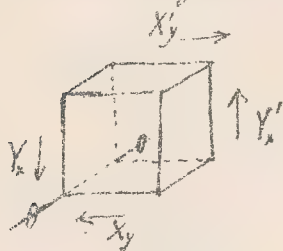


Fig 175.

koto przewędzi o jako osi to otrzymamy równania ruchu:

$$\rho dx dy dz \left( Y \frac{dx}{2} - X \frac{dy}{2} \right) + Y_2 dy dz dx - X_2 dx dy dz = K_2 \frac{d^2 \theta}{dt^2},$$

gdzie pierwszy człon pochodzi od sił zewnętrznych, działających



jących a natężeniem XYZ na jednostkę masy i, przyjęc  
piomych w środku kostki, drugi i trzeci człon postaci  
a natężeni stycznych działających na powierzchnie kost  
ki, a  $K_1$  i  $K_2$  oznaczają moment bezwładności kostki elemen  
tarnej tj wielkość przodu  $dx dy dz$  da<sup>2</sup>.

Jestli  $\frac{d^2x}{dt^2}$  ma być wielkością skończoną tj ściśle ruch  
wzbudzony ma być skończenie przelki to wobec tego, że  
pierwszy człon równania jest wielkością 4<sup>go</sup> rzędu, a  $K_2$   
jest wielkością 5<sup>go</sup> rzędu, możemy te oba człony wobec  
wielkości niższych rzędów pominąć tak, że dzieląc  
całe równanie przez  $dx dy dz$  dochodzimy do równości

$$Y_x' = X_y$$

warnej ściśle w przypadku granicznym lin  $dx dy dz = 0$ .  
Analogicznie mamy:

$$Y_x = -X_y \text{ itd.}$$

Ji dochodzimy do wniosku, że nawet w ogólnym wypadku  
wystarczy tylko trzy różne gatunki sił stycznych ści  
hających kostkę uwzględnić, innymi słowy, że siły jedne  
go przekroju kostki elementarnej możemy uważać za  
równe (z pominięciem miejsc. małych różnic) co do bez  
względnej wartości (Fig 176). Mając to łatwo już mo  
żemy przejść do wzorów ogólnych na ścinanie kostki.

Stąd one:

$$\gamma = \frac{Y_2}{T} = \frac{Z_1}{T}$$

$$\gamma = \frac{Z_2}{T} = \frac{X_1}{T}$$

$$\chi = \frac{X_2}{T} = \frac{Y_1}{T}$$

Objętość kostki przyznaczeniu odkształceń postaciowych bardzo małych jest niezmieniona.

## Deformacje ciała dowolnego kształtu.

Każde ciało możemy sobie stworzyć z elementów w kształcie kostek. Jeśli ciało doznaje odkształceń to każda



Fig 177

kostka elementarna doznaje równie odkształceń. Z tych odkształceń elementarnych składamy odkształcenie całego ciała. Jeśli każda z kostek elementarnych ciała doznaje odkształceń takiego samego to odkształcenie ciała nazywamy jednorodnym; ogólniejszy jest wypadek, gdy na każdej kostce doznaje takiego samego odkształcenia. Mamy stąd do czynienia z odkształceniem niejednorodnym.

Żeby odróżnić praca z ogólnego stanowiska traktować, zauważymy, że odkształcenie niejednorodne

Żeby odróżnić praca z ogólnego stanowiska traktować, zauważymy, że odkształcenie niejednorodne

da się zredukować do jednorodnego. Aby Auszorn  
tego powiedzenia wykarac, wystarczy udowodnić, że  
deformacje w nieskończenie małej przestrzeni można  
uważać w pierwszym przybliżeniu za jednorodną.

Uwazajmy w tym celu punkt  $xyz$  i jego punkt  
sąsiedni  $x+\xi, y+\eta, z+\zeta$ . Po deformacji pozycja  
pierwszego punktu będzie określona  
na przez współrzędne:

$xyz$  —————  
           $x+\Delta x$   
           $y+\Delta y$   
           $z+\Delta z$

$$x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$$

—————  
           $x+\xi$   
           $y+\eta$   
           $z+\zeta$

Zas' drugiego przez:

$$x+\xi+\Delta x+\Delta \xi$$

$$y+\eta+\Delta y+\Delta \eta$$

$$z+\zeta+\Delta z+\Delta \zeta$$

Fig 178.

gdzie  $\xi, \eta, \zeta$  są funkcjami pewnymi zmiennych  $x, y, z$ .  
Stosując rozwinięcie na szereg Taylora możemy napisać:

$$x+\xi+\Delta x+\Delta \xi = x+\xi + \Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \xi}{\partial z} \Delta z$$

$$y+\eta+\Delta y+\Delta \eta = y+\eta + \Delta y + \frac{\partial \eta}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \eta}{\partial z} \Delta z$$

$$z+\zeta+\Delta z+\Delta \zeta = z+\zeta + \Delta z + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \Delta z$$

Składniki wyższych rzędów opuszczamy.



Lewe strony są w dalszym ciągu odpowiednio:

$$\begin{aligned} &= x + \xi + \left[ \Delta x \left[ 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] + \Delta y \frac{\partial \xi}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial \xi}{\partial z} \right] \\ &= y + \eta + \left[ \Delta x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \Delta y \left[ 1 + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] + \Delta z \frac{\partial \eta}{\partial z} \right] \\ &= z + \zeta + \left[ \Delta x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \Delta z \left[ 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right] \right] \end{aligned}$$

Przy deformacjach chodzi nam tylko o wzajemne położenie punktów. Zmiany wzajemnych położeń określone są ostatnimi członami określonymi. Są to wyrażenia liniowe; wnioskujemy stąd, że deformacje są jednorodne.

Z deformacji tych jednorodnych w nieskończenie małych obszarach składamy teraz deformację całkowitą ciała, które w ogólnym wypadku będzie niejednorodna.

W myśl tej uwagi rozpatrywać nam wystarczy tylko deformacje jednorodne, bo w każdej chwili możemy z nich przejść do niejednorodnych.

Czem się charakteryzuje analitycznie odkształcenie jednorodne? Punkt  $x y z$  przyjmijmy po odkształ-

cenie porzycy:  $x+dx, y+dy, z+dz$ . Odkształcenia  
przytem występujące, znaczący jest wyżej str. 289:  
 $du$ , naznaczymy tu  $d\xi, d\eta, d\zeta$ . Jeśli odkształce-  
nie ma być jednorodne, to muszą częściowe podob-  
ne wydłużenia krotek elementarnych być wielkościami  
statemi. Gdyby bowiem one miały w uważanej przestrze-  
ni wartości zmienne, to świadczyłoby to, że wydłużenie  
się nierównomiernie w uważanym kierunku; zatem odkształ-  
cenie nie byłoby jednorodne. Mamy stąd następujący  
system równań różniczkowych częściowych:

$$\left. \begin{array}{lll} \frac{\partial \xi}{\partial x} = a_1 & \frac{\partial \xi}{\partial y} = a_2 & \frac{\partial \xi}{\partial z} = a_3 \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = b_1 & \frac{\partial \eta}{\partial y} = b_2 & \frac{\partial \eta}{\partial z} = b_3 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} = c_1 & \frac{\partial \zeta}{\partial y} = c_2 & \frac{\partial \zeta}{\partial z} = c_3 \end{array} \right\} (a)$$

System ten można bezpośrednio skądować: Mamy:

$$\xi = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z$$

$$\eta = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z$$

$$\zeta = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z,$$

gdyż  $\xi, \eta, \zeta$  oznaczają przesunięcia punktów,  $a, b, c$  stałe całkowania. Dobierając odpowiednio początek układu tak żeby stałe całkowania znikły, mamy rozwiązanie systemu równań różniczkowych w formie:

$$\xi = a_1 x + a_2 y + a_3 z$$

$$\eta = b_1 x + b_2 y + b_3 z$$

$$\zeta = c_1 x + c_2 y + c_3 z.$$

czyli wobec tego, że  $\xi = x' - x$ ,  $\eta = y' - y$ ,  $\zeta = z' - z$ , mamy na współrzędne punktu po odkształceniu następujące wartości:

$$x' = x + \xi = (1 + a_1)x + a_2 y + a_3 z$$

$$y' = y + \eta = b_1 x + (1 + b_2)y + b_3 z$$

$$z' = z + \zeta = c_1 x + c_2 y + (1 + c_3)z$$

} (b)

Współrzędne więc punktu po odkształceniu wyrażają się liniowo przez współrzędne punktu przed odkształceniem. Stąd wniosek geometryczny, że proste w uwarzianem ciele przechodząc po deformacji znowu w proste, płaskieczyzny i nowu w muszeczyzny; zmieniają one tylko kąt nachylenia.



Kula przejdzie w ogólność na elipsoidę. Stwierdzi tworem geometrycznego będzie zachowany.

Zapytamy teraz jaki rodzaj skrócenia przedstawia te równania.

Rozwojmy, co się dzieje z punktami na osiach  $x, y, z$ .

Gdy założymy  $x=0, y=0, z=0$ , to  $x'=0, y'=0, z'=0$ .

Gdy założymy:  $y=0, z=0$ , to weźmiemy pod uwagę punkty osi  $x$ . Dostajemy na ich współrzędne po deformacji wartości:

$$x' = (1+a_1)x$$

$$y' = b_1 x$$

$$z' = c_1 x$$

Równania te powiada, że każdy z punktów leżący pierwotnie na osi  $x$  doznał 1° przesunięcia w kierunku osi  $x$  2° odchylił się ku osi  $y$  oraz osi  $z$ , a o ile, podając te kąty mierzących owe odchylenie.

Gdy założymy  $x=0, z=0$ , to weźmiemy pod uwagę punkty osi  $y$ . Dostajemy na ich współrzędne po deformacji wartości:

$$x' = a_2 y$$

$$y' = (1+b_2)y$$

$$\alpha = \alpha_2$$

Równania te posiadają, że każdy z punktów  $a_1, a_2$  był pierwotnie na osi  $y$  doznał  $1^\circ$  przesunięcia w kierunku osi  $y$   $2^\circ$  odchylał się od osi  $x$  oraz  $3^\circ$ , zaś  $a_2, c_2$  podlegały kątów minusculem odchylenie. Jeśli odet-



Fig. 178

niemy na osiach  $x$  i  $y$  boki kwadratu, będącego przekrojem kostki, to boki te w myśl poprzednich wywodów nachyła się po deformacji o kąty  $\mu$  i  $\nu$  do osi  $x$  i  $y$ ;

i o pewne kąty do osi  $x$ , czego nie bierzemy pod uwagę, bo chodzi nam o przekrój w jednej płaszczyźnie. Widzimy już stąd odrazu że równania owe przedstawiają deformację ścinania (skrętu). W szczególności, gdybyśmy zakładali  $\mu = \nu$ , mielibyśmy wypadek poprzednio rozważony (Fig. 99), gdzie kąt skręcenia wynosił  $\frac{\pi}{2}$ . Tutaj atoli z założenia ogólnego, że  $\mu$  i  $\nu$  nachyleni osi po deformacji do osi pierwotnych są różne, mamy też wniosek ogólny, że te kąty nachyleni  $\mu$  i  $\nu$  są różne.

Zauważymy tu jeszcze że przekształcenie uwarowanego kwadratu można prościej wydedukować obrotem pionowego o kąt jaki łatwo wyrozumować sobie  $\chi = \frac{\mu - \nu}{2}$ .

Równania (b) przedstawić możemy jeszcze toroidalnie w innej formie:

$$\begin{aligned} x' &= x(1+a_1) + \frac{b_1+a_2}{2}y + \frac{a_3+c_1}{2}z + \frac{a_3-c_1}{2}z - \frac{b_1-a_2}{2}y \\ y' &= y(1+b_2) + \frac{c_2+b_3}{2}x + \frac{b_1+a_2}{2}x + \frac{b_1-a_2}{2}x - \frac{c_2-b_3}{2}z \\ z' &= z(1+c_3) + \frac{a_3+c_1}{2}x + \frac{c_2+b_3}{2}y + \frac{c_2-b_3}{2}y - \frac{a_3-b_1}{2}x \end{aligned}$$

czyli wprowadzając skrócenia:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a_1-b_2}{2}, \quad \beta = \frac{a_3-c_1}{2}, \quad \gamma = \frac{b_1-a_2}{2} \\ \varphi &= c_2+b_3, \quad \psi = a_3+c_1, \quad \chi = b_1+a_2 \end{aligned}$$

w formie:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x(1+a_1) + \frac{\chi}{2}y + \frac{\psi}{2}z + \beta z - \gamma y \\ y' &= y(1+b_2) + \frac{\varphi}{2}x + \frac{\chi}{2}x + \gamma x - \alpha z \\ z' &= z(1+c_3) + \frac{\psi}{2}x + \frac{\varphi}{2}y + \alpha y - \beta x \end{aligned} \right\} (c)$$

Wskazaliśmy (c) możemy już w łatwości odróżnić trzy

Mechanika dok XL.



ciągnięciu, z których pierwsza pochodzi z wydłużenia występujących wskutek deformacji; druga ze zmiany kątów, trzecia z obrotu - to przedstawia ona przecież przesunięcia wywołane obrotem nieskończenie małym spotykane już w mechanice ciał sztywnych.

Jakie siły powodują owe deformacje i obroty nie są bez pośrednim skutkiem sił sprężystych; siły sprężyste powstają skutkiem deformacji względnych, a więc tylko skutkiem składników pierwszych. Npitarczy więc oddzielnie rozpatrzeć siły powodujące składniki pierwsze i wtóre.

Wydłużenia powodują, jak wiemy siły:  $X_1, Y_1, Z_1$ ; jest bowiem:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{X_1}{E} - \mu \frac{Y_1 + Z_1}{E} \\ b_1 &= \frac{Y_1}{E} - \mu \frac{X_1 + Z_1}{E} \\ c_1 &= \frac{Z_1}{E} - \mu \frac{X_1 + Y_1}{E} \end{aligned} \right\} (2)$$

Skłócenia powodują znowa, jak wiemy, siły:  $X_2, Y_2, X_3, Z_3, Y_3, Z_3$ ; jest bowiem:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{Y_2}{T} = \frac{Z_3}{T} \\ \psi &= \frac{Z_2}{T} = \frac{X_3}{T} \\ \chi &= \frac{X_2}{T} = \frac{Y_3}{T} \end{aligned} \right\} (3)$$

Z treści równań (2) i (3) można wyrazić przewrót-  
kości pozostałe. Po wykonaniu stosownych eliminacji dosta-  
jemy np.

$$X_x = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} a_1 + \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} (b_2 + c_3)$$

czyli

$$X_x = \frac{E}{1+\mu} a_1 + \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} (a_1 + b_2 + c_3)$$

czyli przypominając sobie relację  $T = \frac{E}{2(1+\mu)}$  i znając:

$$\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} = L; \quad a_1 + b_2 + c_3 = \Delta. \quad \text{Tak dochodzimy}$$

do następujących wzorów:

$$X_x = 2Ta_1 + L\Delta$$

$$Y_y = 2Tb_2 + L\Delta$$

$$Z_z = 2Tc_3 + L\Delta.$$

Co się tyczy zaś napręć ścinających, to będzie:

$$X_y = Y_x = T\alpha = T(a_2 + b_1)$$

$$Y_z = Z_y = T\varphi = T(b_3 + c_2)$$

$$Z_x = X_z = T\psi = T(c_1 + a_3).$$

Przepisując to jeszcze raz wyrażenie dostajemy wzory:

na siły zmieniające objętość ciała:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= 2T \frac{\partial \xi}{\partial x} + L \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \\ Y_y &= 2T \frac{\partial \eta}{\partial y} + L \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \\ Z_z &= 2T \frac{\partial \zeta}{\partial z} + L \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} (f)$$

na siły kinujące:

$$\left. \begin{aligned} X_y &= Y_x = T \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ Y_z &= Z_y = T \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \\ Z_x &= X_z = T \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} (g)$$

Są to więc napięcia sprężyste wewnątrz ciała, w dowolny sposób odkształconego. Jeśli mamy:

$$\xi = f_1(xyz)$$

$$\eta = f_2(xyz)$$

$$\zeta = f_3(xyz)$$

to ze wzorów tych możemy już siły obliczyć.

Weźmy teraz pod uwagę kostkę elementarną wewnątrz ciała i przyjmijmy ogólny wypadek, że ona nie zostaje w równowadze; że jest więc w ruchu. Z tego założenia wynika, że siły  $X'_x, X'_x, \dots, X'_y, X'_y, \dots$  są na ogół różne.



Jakie siły mogą działać na taką kostkę elementarną, dajmy na to, w kierunku  $x$  i jakiego udzieli jej przyspieszenia wypadkowego? Siła wyciągająca wypadkowa w tym kierunku będzie:

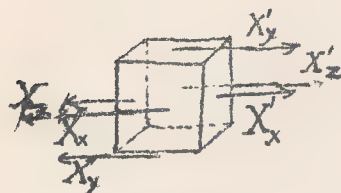


Fig 174.

$$(X'_x - X_x) dy dz$$

gdzie  $dy dz$  jest przekrojem. Wypadkowe siły kinujące będą:

$$(X'_y - X_y) dx dz ; (X'_z - X_z) dx dy .$$

Moze jeszcze działać jakaś siła wewnętrzna np. ciężkość. Będzie ona:

$$X_g dx dy dz$$

gdzie oznaczę gęstość ciała reszta  $dx dy dz$  objętość kostki elementarnej. Znacząc przyspieszenie wypadkowe w tym kierunku  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$  i superponując wszystkie owe siły poprzednie, mamy równość:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho dx dy dz = X_g dx dy dz + (X'_x - X_x) dy dz + (X'_y - X_y) dx dz + (X'_z - X_z) dx dy .$$

czyli

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \int dx dy dz = X \int dx dy dz + \frac{\partial X}{\partial x} \int dx dy dz + \\ + \frac{\partial X}{\partial y} \int dx dy dz + \frac{\partial X}{\partial z} \int dx dy dz$$

Powodując się już teraz analogią wypisujemy wartościujące trzy równania dynamiczne:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= Y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= Z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} (h)$$

Równania te rozpadają się widocznie na dwie części: na część Newtonowską i dodatek pochodzący od sił odśrodkowych.

W razie spoczynku (równowagi), przyspieszenia i siły zewnętrzne anikują i równania wtedy owe redukują się do formy:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \end{aligned} \right\} (i)$$

ty zostaje tylko dodatek pochodzący od sił sprężystych.

Jeszcze jednak należy inny system sił odróżnić: odnośnie do powierzchni ciała. Niech więc powierzchnia ma w danym punkcie nachylenie  $xyz$ . Do

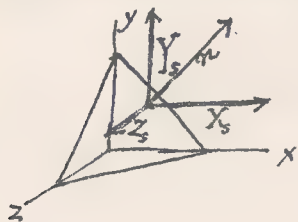


Fig 180.

tej powierzchni mogą być przypisane jakies siły. Składowe sił w kierunkach trzech osi będą:  $X_s, Y_s, Z_s$ .

Jestli przez  $\Delta$  oznaczymy powierzchnię trójkąta o wierzchołkach w punktach przecięcia się płaszczyzny stycznej do uwziowanej powierzchni, zaś  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  jego ramy na płaszczyzny normalne do osi  $x, y, z$ , to w warunkach równowagi wszystkich sił działających w kierunku osi  $x$  wypiszemy równość:

$$X_s \cdot \Delta - X_x \Delta_x - Y_y \Delta_y - Z_z \Delta_z = 0 \quad \text{--- (j)}$$

skąd

$$X_s = X_x \frac{\Delta_x}{\Delta} + Y_y \frac{\Delta_y}{\Delta} + Z_z \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Niech  $n$  oznacza kierunek normalnej w uwziowanym punk-



cie, to  $\frac{\Delta_x}{\Delta} = \cos nx$ ,  $\frac{\Delta_y}{\Delta} = \cos ny$ ,  $\frac{\Delta_z}{\Delta} = \cos nz$ . Stąd możemy napisać równanie pierwsze i dwa następne, kierując się analogią w następującej formie:

$$\left. \begin{aligned} X_s &= X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz \\ Y_s &= Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz \\ Z_s &= Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz \end{aligned} \right\} (k)$$

Jest to system sił działających na powierzchnię jak bryła zorientowaną. Lecz wyrażenia te uśłowodnione są na razie tylko dla równowagi. Wrazie ruchu zaś siły  $X_s$ ,  $X_x$ ,  $X_y$ ,  $X_z$  w(j) nie równoważyłyby się, tylko wypadkowa ich równałaby się iloczynowi masy i przyspieszenia:

tyż trzeba by napisać:

$$X_s \Delta - X_x \Delta_x - X_y \Delta_y - X_z \Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{Vol} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} dx dy dz$$

lecz ponieważ  $\text{Vol}$  jest wielkością nieskończenie małą  $92^\circ$  rzędu, zatem prawa strona równania zanika. Przez to zaś mamy uśłowodnione że system sił działających (k)

na powierzchni uwarzonego ciała jest też w nacie ruchu swobodny. Mamy tak już cały aparat matematyczny dla badania sił sprężystych, ale jest aż, który systemy równań: (f), (g), (h) w każdym po trzy równania:

Pierwsze więc trzy równania (f) określają siły ciągnące przy pomocy odkształceń  $\xi_x, \xi_y, \xi_z$ , modułu skręcenia  $T$  i ścisłości  $L$  wyrażającej się przez moduł Younga  $E$  i współczynnik Poissona  $\mu$ ; drugie trzy (g) określają siły ścinające przy pomocy modułu skręcenia  $T$  i odkształceń  $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \xi_{xy}, \xi_{yz}, \xi_{zx}$ ; trzecie trzy (h) tzw. równania dynamiczne ruchu, określają przyspieszenia w zależności od sił zewnętrznych i napięć sprężystych; czwarte trzy (k) określają siły przyziębione na powierzchni ciał w zależności od sił ciągnących i cosinusów kątów nachylenia.

Tercze zostaje tylko zastępowanie tych równań. Jest to praca ogromnie zawiła, i to już w wypadku najprostszego, gdy budowa ciała jest izotropowa, bo już w tym razie mamy do czynienia z 12 równaniami. Wobec zaś, że badamy deformację kryształów, to sprawa jest jeszcze

zawilona.

Tutaj ograniczymy się do statyki, a więc stale zakładając brzościenny, że przypileceni  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ... znikają. Podkreślimy więc stale mieć przed oczyma takie systemy równań:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} X &= X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz \\ Y &= Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz \\ Z &= Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} X &= 2T \frac{\partial^2}{\partial x^2} + L \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ Y &= 2T \frac{\partial^2}{\partial y^2} + L \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ Z &= 2T \frac{\partial^2}{\partial z^2} + L \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} X &= T \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \\ Y &= T \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ Z &= T \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$



Do rozwiązania poszczególnych zagadnień statyki sprężystości wystarczające jest ogólne twierdzenie Kirchhoffa, które tu bez dowodu przyjmujemy: jeśli są dane siły działające na powierzchnie:  $X_s, Y_s, Z_s$  i siły działające na wewnętrzne ciała  $X, Y, Z$ , to jest tylko jeden system przesunięć  $\xi, \eta, \zeta$ , który owe równania (I) spełnia. Jest to twierdzenie wygodne o tyle, że jeśli potem znajdziemy jakim bądź sposobem jakieś rozwiązanie równań (I), to będziemy wiedzieli, że jest to rozwiązanie jedyne.

Zarazem postępujemy tak: Przyjmujemy hipotetycznie jakieś funkcje  $\xi, \eta, \zeta$ , następnie podstawiamy je do równań (I) i sprawdzamy, czy są spełnione.

Bliziej metody tę rozpatrzemy na przykładach.

1. Hertzott ciała nie zmienia się, deformacja polega tylko na jednostajnem skróceniu się.



Odczuwamy, że zachoczyć się będą następujące rzeczy:

$$x' = x(1 + \kappa)$$

$$y' = y(1 + \kappa)$$

$$z' = z(1 + \kappa)$$

stad

$$\xi = \kappa x \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \kappa$$

$$\eta = \kappa y \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \kappa$$

$$\zeta = \kappa z \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \kappa$$

Wstawiając to w (3)(l), mamy:

$$X_x = (2T + 3L)\kappa = Y_y = Z_z = p$$

z (4)(l) zaś dostajemy:

$$X_y = Y_x = Z_x = 0$$

Równowia dynamiczne (l) (l) są spełnione, bo oczywiście

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = \frac{\partial X_y}{\partial y} = \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \quad \text{itd.}$$

Wstawiając powyższe wyrażenia do (2)(l), mamy:



Fig 182.

$$X_s = p \cos \alpha$$

$$Y_s = p \cos \gamma$$

$$Z_s = p \cos \alpha$$

Inaczej to, że na element powierzchni działają siły  $X_s, Y_s, Z_s$  które równają się ~~normalnej~~ normalnej sile wypadkowej

Formalnej do powierzchni w uwzględnieniu pękania. Łatwo deformacja polegająca na jednostajnym skurczeniu się powstanie wtedy, jeśli nie działają żadne, sty wewnątrz proste ciągnięcia normalne, przyczem te ostatnie muszą być jednakowe (ciągnięcie hydrostatyczne). Aby nastąpiło skurczenie, czy powiększenie objętości, to zależy od znaku czynnika  $\kappa$ . Niech  $\theta = 3\kappa$ ,

$$\kappa = \frac{p}{2T + 3L}, \quad \theta = \frac{3p}{2T + 3L}$$

Nobis  $T = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad L = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$  jest:

$$\theta = \frac{3p}{\frac{E}{1+\mu} \left\{ 1 + \frac{3\mu}{1-2\mu} \right\}} = \frac{p}{\frac{E}{3(1-2\mu)}} = \frac{p}{\kappa}.$$

Jest to wzór, który już wyżej (str. 296) wyprowadziliśmy na odkształcenie objętościowe kostki.



Fig 183

Odkształcenie niejednorodne natomiast nastąpi np. gdy pompa Cailleteta rozciągnie ciecz w naczyniu zamkniętym a zewnątrz będzie panować ciśnienie inne.

Wielkość odkształcenia zależy oczywiście od różnicy ciśnień.



nia, jakie mamy wewnątrz i zewnątrz.

W prosty sposób da się rozstrząsnąć specjalny wypadek takiego odkształcenia niejednorodnego mianowicie zagęszczenie jak zdeformuje się walec wydrążony, na którego powierzchni wy-

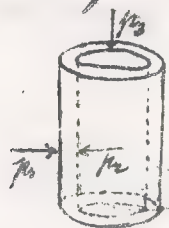


Fig 184.

warte są ciśnienia  $p_1, p_2, p_3$ .

$\eta, \xi$  dadzą się wyznaczyć jako przesunięcia promienia wodzącego.

Nie trudno też rozstrząsnąć deformację kuli wewnątrz pustej. Przesunięcia mogą się tu odbywać tylko w kierunku promienia kuli.

$$\xi = \varphi(r) \frac{r}{2}$$

$$\eta = \varphi(r) \frac{r}{2}$$

$$\xi = \varphi(r) \frac{r}{2}$$

2. Ze wzorów ogólnych (1) można odnaleźć wypadki specjalne, z których doszliśmy do wzorów ogólnych.

Zakładając:  $\xi = 0$ , a równanie na skruszenie

$$\eta = -\mu_2 y, \quad \xi = -\mu_1 x$$

gdzie  $x$  oznacza odkształcenie,  $y$  w kierunku poziomym, dostaniemy z (3) (1):

$$X_x = 2T_2 + L\varepsilon(1-2\mu)$$

$$Y_y = -2T_2 + L\varepsilon(1-2\mu)$$

$$Z_z = -2T_2 + L\varepsilon(1-2\mu)$$

Siły ścinające  $X_y, Y_z, Z_x$  znikają. Równania (1), (2) są spełnione.

Wobec  $T = \frac{E}{2(1+\mu)}, L = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ , bedzie

$$X_x = \varepsilon \left\{ \frac{2E}{2(1+\mu)} + \frac{(1-2\mu)E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \right\}$$

$$X_x = \varepsilon E.$$

Odpowiednio  $Y_y = Z_z = 0$ .

Łątwy te same co stosowały się do pojedynczej kostki. Tutaj są one uogólnione do ciała o dowolnym kształcie.

Analogiczne rozwiązania można przeprowadzić dla sił ścinających. Znowu się dostanie wzory na odkształcenie ciała o dowolnym kształcie, podobne jak dla kostki. Wystarczy wstawić na przesunięcia wartości

$$\xi = \alpha y, \eta = 0, \zeta = 0$$

3. Przejdziemy teraz do zagadnień trudniejszych. Rozważymy przedwzrostem skrzęta.

Nech więc walec prosty o podstawie kołowej zdeformuje się w ten sposób, że górna jego podstawa skrzy się o pewien kąt bardzo mały  $\varphi$ , dolna zaś zostanie niemiesziona. Odkształcone to będzie

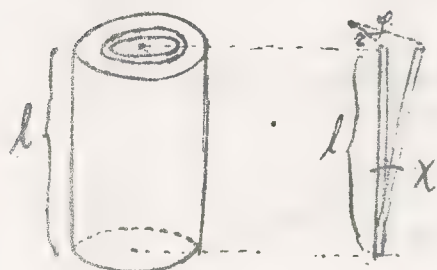


Fig 185.

już niżejnorodne.

Zagadnienie to można traktować albo w sposób metodyczny tak jak wyżej zanaczyliśmy albo bezpośrednio. Spróbujmy najpierw bezpośrednio. Uwzględnijmy w tym celu

wyjęte włókno z waleka. Deformację, jakiej ono dozna można sądzić powodu skrzywienia bardzo małego na ścinanie. Wyrazimy ją tedy:

$$\chi = \frac{r\varphi}{l}$$

$X_s = T\chi = T\frac{r\varphi}{l}$  (siła działająca na jednostkę powierzchni włókna). Na przekrój kątem włókna z dr dy działa będzie siła:

$$r dr dy \cdot T \frac{r\varphi}{l}$$

A całkowity kąt przekrój (poprzeczny) waleka będzie: siła:

$$\int r dr dy T \frac{r\varphi}{l}$$



Moment tedy całkowity wywołujący skręcenie walca będzie:

$$M = \int r^2 d\varphi dp T \frac{r\varphi}{l}$$

$$M = \frac{T\varphi}{l} \int_{\varphi=0}^{\varphi} \int_{r=0}^r r^3 dr dp = \frac{T\varphi}{l} \cdot \frac{r^4}{4} \cdot 2\pi$$

$$M = \frac{\pi a^4 \varphi}{2l} \cdot T$$

Teraz zaś zastosujmy metodę. Trzeba więc uczynić pewne hipotezy co do  $\xi, \eta, \zeta$ .

Bezpośrednio widzimy że odchylenie

$$z = \varphi \frac{r}{l}$$

Co do  $\eta$  założymy że  $\eta = 0$ ;

$$\xi = R \cdot z \cdot \sin(2x) = z \cdot x$$

$$\eta = -R \cdot z \cdot \cos(2x) = -z \cdot x$$

Zasadnicze więc założenie będzie następujące:

$$\xi = \frac{\varphi}{l} x y z$$

$$\eta = 0$$

$$\zeta = -\frac{\varphi}{l} x y$$

czyli mianowicie  $\frac{\varphi}{l} = c$  mamy:

$$\xi = c y z, \quad \eta = 0, \quad \zeta = -c x y$$

Mechanika. Ark XLII.

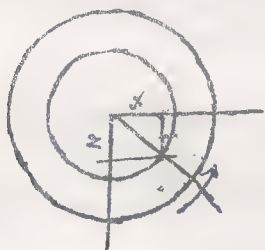


Fig 186.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = cz, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = cy$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -cy, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -cx, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$$

Stąd:

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$$

tu niema sił wydłużających.

$$X_2 = Tcz, \quad Y_2 = -Tcx, \quad Z_2 = 0$$

Prosta jest jeszcze stwierdzić czy system ten sił jest możliwy. W tym celu wstawiamy wartości wypracowane na siły do równań dynamicznych (1) (2). Łatwo się przekonać można, iż są one spełnione.

Zwracając się do równań (2) (3) dostaniemy wyrażenia na siły na pobocznicy walca zaczerpione:

$$X_3 = Tcz \cos ny = Tcz \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$Y_3 = Tcz \cos \frac{n\pi}{2} - Tcx \cos \frac{n\pi}{2} = 0$$

$$Z_3 = -Tcx \cos(ny) = 0$$

Zatem na pobocznicy walca nie działają żadne

sity. Na przekrój natomiast działają następujące:

$$X_s = Tcz \cos 0 = Tcz.$$

$$Y_s = 0$$

$$Z_s = -Tcx.$$

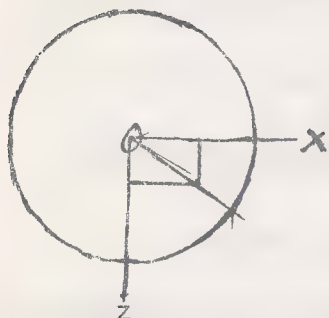


Fig 287

Kierunek siły wypadkowej będzie określony przez:  $\frac{Z_s}{X_s} = -\frac{x}{z}$  tj. siła wypadkowa będzie normalnie skierowana do promienia wodzącego. Wskazać jej będzie:

$$F = \sqrt{X_s^2 + Z_s^2} = Tcz$$

Wypadkowa wszystkich tych sił stycznych jest zero, ale moment wypadkowy nie jest zerem; będzie on

$$M = \int Tcz^2 \cdot 2\pi r \cdot dz = \frac{\pi a^2 l}{2l} \cdot T$$

Ostateczny zatem rezultat jest ten sam, co wyżej bez pośrednio analizowany.

Powysze rozważania są ważne tylko dla walca kołowego. Gdyby walec miał przekrój inny niż kołowy to już nie moglibyśmy twierdzić, że  $\eta = 0$ .



Dokładną teorię sprężystości dla ciał przemieszczających podług Saint Venant. Dochodzi on do ciekawych rezultatów; pro-



Fig 188.

kuje się, że prężymy deformują się w ten sposób, że jedne partycje np. kreskowane podnoszą się w górę, inne zaś obniżają się. Problem ten da

się rozwiązać ogólnie przy pomocy teorii potencjału.

4. Przebieg belki. Wyobraźmy sobie belkę o jednolitym wzdłuż przekroju. Do końców belki przyrzepmy

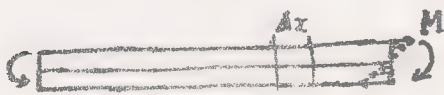


Fig 189.

momenty  $M$ , któreby ją skrzycały\*) belka przysunie kształt łuku a deformacja której ulegnie będzie niejednorodna. Górne partycje belki się wygięły, dolne zaś skurczą się. W pośredku zaś między temi partycjami

znajdzie się warstwa neutralna (środkowa), która nie dłone ani skurczenia ani wydłużenia.

\*) nt. koto on prostopadłej do długości.

Ażeby w belce istniała równowaga, widoczne jest, że i w każdym jej przekroju musi być moment jednaki tylko przeciwnie skierowany niż na końcu. Łatwo to sobie uprzytomnić, gdy tylko wyobrażamy sobie w każdym z przekrojów belkę przeciętą. Z tego, że wszystkie przekroje mają jednaki moment wynika, że belka zdeformowana przyjmie kształt łuku koła.

Uważajmy teraz element belki  $\Delta x$ . Po deformacji będzie dlań zachodzić proporcja:

$$\Delta x' : \Delta x = R+y : R$$

$$\frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{y}{R}$$

Lecz  $\frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x}$  przedstawia wydłużenie procentowe włókna:

$$\frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{X}{L}$$

Stąd: 
$$X_s = E \frac{y}{R}$$

jest to siła ciągnąca dla każdego z włókien. Siły takie są rozmieszczone w całym przekroju. Wypadkowa ich jest zatem

$$\sum E \frac{y}{R} q$$

jeśli przez  $q$  oznaczymy element przekroju. Lecz ponieważ

nie ma innych sił zewnętranych postępowych (sa tylko momenty), bo w przeciwnym razie nie byłoby równowagi, zatem suma sił wynosi, a stąd wynika, że

$$\sum y_i = 0$$

St. dochodzimy do wniosku, że włókno neutralne przechodzi przez środek masy.

Moment zewnętrzny, który przyłączamy do końca belki, jest dany. Musi on być równy momentowi każdego przekroju. Inaczej go litera  $M$  dostajemy:

$$M = \sum \frac{E}{R} y_i^2 = \frac{E}{R} \sum y_i^2 = \frac{E}{R} \Theta$$

jeśli przez  $\Theta$  oznaczymy moment bezwładności przekroju (co to si przekrojonej przez włókno neutralne). Stąd

$$R = \frac{E \Theta}{M}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E \Theta}$$

St. belka będzie tem więcej wygięta im większy będzie moment siły, a im mniejszy będzie moment bezwładności przekroju. Tem mniej się zaś belka wygnie przy danym momencie  $M$  im moment  $\Theta$  jest większy.  $E \Theta$  jest ceteris —



miarę sztywności czyli wytrzymałości na wygięcie. Wyciąga się z tych rozważań praktyczne wnioski i buduje

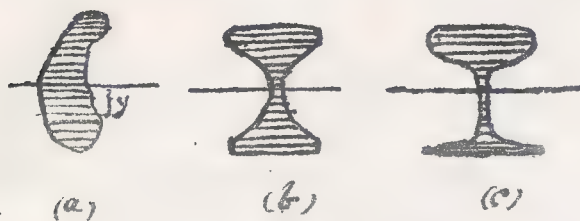


Fig 190.

sie trawerzy, szyny kolejowe w kształcie mniej więcej jak pod (b) i (c), tak aby moment bezwładności

był możliwie duży, a nie tak jak pod (a). Fig 190.

Podobnie jest w kościach zwierząt; największa masa nagromadzona jest na obwodzie.



Fig 191

Przy wygięciu w różnych kierunkach będą momenty bezwładności różne, a stąd będą też różne przekrzywienia.

Uważajmy belkę o przekroju prostokąta o bokach  $b$  i  $c$ .

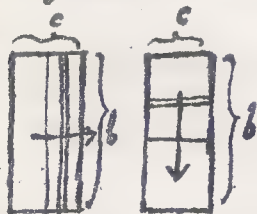


Fig 192.

$$\frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\theta_1} : \frac{1}{\theta_2}$$

$$\theta_1 = 2 \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dz = 2 \frac{b c^3}{24} = b c \frac{c^2}{12}$$

$$\theta_2 = 2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy = 2 \frac{c b^3}{24} = b c \frac{b^2}{12}$$

stąd

$$\frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} = b^2 : c^2$$

fi. wytrzymałość belki o przekroju prostokątnym jest wprost proporcjonalna do kwadratu boku w kierunku którego nastąpiło wygięcie.

Dotąd postępowaliśmy w tym przykładzie według dawnej teorii J. Bernoulliego i Eulera. Oświadczenia sprzeczności nie było mowy. Według Saint Venanta teoria ta okazała się niedokładna. Zauważenie uczynione tutaj, że cała deformacja odbywa się tylko w płaszczyźnie jednej jest niewłaściwe. Deformacja następuje także też w kierunku poprzecznym w ten mianowicie sposób, że górne włókna muszą się skurczyć dośrodkowo zaś rozszerzyć tak że



Fig 193.

przekroje przed i po deformacji będą mniej więcej wyglądać jak wskazuje Fig 193.

Zwróćmy się więc do ogólnej teorii. Znowu trzeba zacząć podobnie jak przy skrajnie walca pewne hipotety, które potem trzeba uzasadnić. Tutaj wprowadzając ułamek w sposób taki, jaki przedstawia Fig 194 weźmiemy następujące



Fig 194.

przyjęcia:

$$\xi = -\frac{\gamma x}{R}$$

$$\eta = \frac{1}{2R} (x^2 + \mu y^2 - \mu z^2)$$

$$\zeta = \frac{\mu}{R} yz$$

Stąd

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\gamma}{R}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{x}{R}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{x}{R}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\mu y}{R}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\frac{\mu z}{R}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\mu z}{R}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\mu y}{R}$$

Obliczając według wzorów (I) siły, mamy:

$$X_x = -2T \frac{\gamma}{R} - L \frac{\gamma}{R} (1 - 2\mu) = -\frac{E\gamma}{R}$$

$$Y_y = 2T \frac{\mu y}{R} - L \frac{\gamma}{R} (1 - 2\mu) = 0$$

$$Z_z = 0$$

$$X_y = T \left( -\frac{x}{R} + \frac{x}{R} \right) = 0$$

$$Y_z = 0$$

$$Z_x = 0$$

Oskarżając się zatem, że żadne siły inne nie działają prócz  
ciągących w kierunku  $x$ . Jest to wniosek, któryśmy przed-

Mechanika Ark XLIII.



tem bezpośrednio otrzymali (str 331). System ten się spełnia oczywiście równania dynamiczne (118), bo  $\frac{\partial X_k}{\partial x} = 0$ .

Jeżeli się na powierzchni drążących, to odcięcia te, że nie trzeba ich przyczepiać. Jedyną więc te występujące siły są przycięsione do przekroju. Są rozciągające w równowadze, które one deformacje. Łatwiej jeszcze pytanie, jaki kształt przyjmie belka.

Wobec  $\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{R}$  jest  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{1}{R}$ .

Jeżeli wzoru na krzywiznę:

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{dy}{dx}}{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{3}{2}}}$$

opuszczając  $(\frac{dy}{dx})^2$  jako wielkość nieskończenie małą wobec 1, mamy

$$\frac{dy}{dx^2} = \frac{1}{R} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

Skreślenie belki w płaszczyźnie  $xy$ .

Wobec  $\frac{\partial \eta}{\partial z} = -\frac{\mu z}{R}$  jest  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = -\frac{\mu}{R}$ .

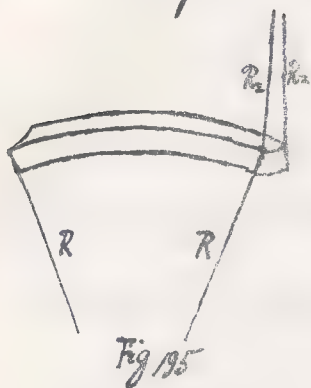
Łatem krzywizna w płaszczyźnie  $yz$  jest:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\mu}{R}$$

$$R_2 = \frac{R}{\mu}$$

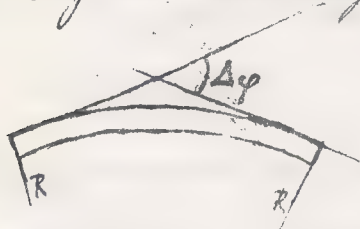
Wzór ten ostatni można wyznaczyć do oznaczenia wyprę-

Ka Poissona  $\mu$ . Ustalemy to w ten sposób że zmierzmy promienie krzywizny  $R$  i  $R_2$ . Pomia-



ry takil można wykonać różnego-  
nie sposobami. Jeden up. zaprowo-  
dzą prądków Newtona pochodzą od  
Mallocka, który podał teorię  
stereg leżącą dla różnych ciąż.

Moznaby się jeszcze zapytać przy wygięciu belki o zmianę  
nachylenia końcowego:  $\Delta\varphi$ . Jeśli odległość belki oznaczy-



my przez  $a$  to :  $a = R \Delta\varphi$ .

Wobec wzoru:  $\frac{1}{R} = \frac{M}{E\Theta}$  jest

$$\Delta\varphi = \frac{a}{R} = \frac{Ma}{E\Theta} = \frac{Ma}{E \frac{b^3 c}{12}}$$

Ten sam wzór można uogólnić do  
belki i prętów skrzywionych już z początku. Skrzywione już  
brawiem belki można rozłożyć na elemen-  
ty, z których każdy można uwozić za kł-  
owy prętek. Sumując skrzywienia końco-  
we elementów powstanie skutkiem dła-  
wego wygięcia takiej belki, dostajemy



skręcenie wypadkowe:

$$\Delta\Phi = \sum \Delta\varphi = \frac{M}{E\frac{b^3}{12}} \sum a = \frac{Ml}{E\frac{b^3}{12}}$$

jeśli pręci  $l$  naznaczymy całą długość wygiętej belki. To warunek jest zatem dla sprężyny o przekroju prostokątnym. Tak np.

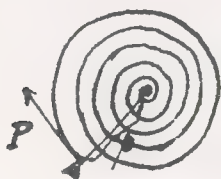


Fig 198.

dla sprężyny zegarka wielkość momentu będzie:  $M = pP$ .

Przy skręceniu o kąt  $\Delta\varphi$  wystąpi zaś według wzoru moment:

$$M = \Delta\varphi \cdot \frac{Eb^3c}{12l} = Pp$$

Tak więc doszliśmy do teorii sprężyny.

5. Teraz przejdziemy do przykładu, gdzie deformacja wykazuje nie pręci moment lecz siłę postępową np. belka lewym końcem wmurowana w ścianę, na prawy zaś działa siła  $P$ .



Fig 199.

By była równowaga musi siła  $P$  przeciwdziałać siła inna równa co do bezwzględnej wartości  $P$  ale przeciwną skierowaną. Jest to osiągnięte przez wmurowanie belki w ścianę. Lecz te obie siły  $P \downarrow$  i  $P \uparrow$  tworzą parę sił, i za-

te pręci wmurowaniu belki w ścianę. Lecz te obie siły  $P \downarrow$  i  $P \uparrow$  tworzą parę sił, i za-



tem, aby istniała równowaga musi istnieć moment

$$M_0 = Pl$$

równowagący działanie pary sił.

Jaka nastąpi deformacja? Od czasu Bernoulliego i Eulera argumentuje się tak: Wyobraźmy sobie belkę w miejscu jakimś przeciętą. Aby odkryty kawał nie odjechał się trzeba przyćwic moment:

$$M_x = P(l-x)$$

i praca tego siły postępową  $P\Delta$ .

Zwracać będziemy tylko na deformacje spowodowane momentami:

$$M_x = \frac{E\Theta}{R_x} = P(l-x).$$

O siłach postępowych\*) zamilcza się, bo gdyby się chciało je uwzględnić to byłoby to znaczną komplikacją. Wpływ ich rozstrząsa jest niemożliwy. Siłę atoli biorąc trzeba by to uzasadnić.

Gdy się bierze pod uwagę grubsze belki, to pokazuje się, że przekroje belek po deformacji nie są płaskie. Ta jednak sprawa dotyczy tylko belek cienkich, tak że na to nie będziemy zwracać uwagi.

\*) Siłami  $T_x$ , które muszą powstać w przekrojach,

Zapytamy się teraz o kształt belki po deformacji. Przy-

wiżna w punkcie  $x$  będzie :



Fig 200

$$\frac{1}{R_x} = \frac{\frac{d^2\eta}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Pomijając  $\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2$  jako wielkość ułomnie małą wobec 1, mamy

$$\frac{1}{R_x} = \frac{d^2\eta}{dx^2}$$

oraz

$$E \odot \frac{d^2\eta}{dx^2} = P(l-x).$$

Całkując to ostatnie równanie, mamy:

$$E \odot \frac{d\eta}{dx} = P\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \alpha$$

$$E \odot \eta = P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \alpha x + \beta.$$

$\alpha, \beta$  stałe całkowania oznaczymy z warunków prostkowych. W przekroju początkowym wychylenie  $\eta = 0$ , oraz nachylenie osi  $\frac{d\eta}{dx} = 0$ , bo belka jest wmurowana. Stąd wynika, że

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0;$$

a więc:

$$E \odot \eta = P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

jest to równanie zdeformowanej belki. Równanie to jest 3<sup>go</sup> stopnia. Wychylenie belki końcowe będzie:

$$\eta = \frac{Pl^3}{3EB} = \frac{4Pl^3}{E\pi b^3}$$

Jeżeli wychylenie belki o przekroju prostokątnym jest proporcjonalne do 3<sup>ciej</sup> potęgi długości.

Nachylenie zaś końcowe:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_x = \frac{Pl^2}{2EI}$$

Jeżeli nachylenie wzrasta z kwadratem długości.

6. Jeżeli belka jest podparta przy obu końcach, a siła  $P$  działa w środku, to deformację, którą odkształcaemy



Fig 201

do deformacji belki wmurowanej jednym końcem w ścianę. Wychylenie bowiem i nachylenie w środku możemy uważać za równe zero,

końcowe zaś wychylenie równo uważać za wywołane siłą  $\frac{P}{2}$ . stosując wzory poprzednie i wstawiając za  $l$  wartość  $\frac{l}{2}$ , za  $P$  zaś  $\frac{P}{2}$ , mamy:

$$\eta_{\frac{l}{2}} = \frac{22\left(\frac{l}{2}\right)^3}{EI^3} = \frac{Pl^3}{4EI^3}$$

Strzałka więc zgięcia, tak bowiem nazywamy wychylenie  $\eta$ , będzie w tym razie 16 razy mniejsza niż strzałka belki wmurowanej jednym końcem.



Podobnie jak to zagadnienie da się też zredukować do zagadnienia, gdy belka jest oboma końcami wmurowana w ściany, a w środku wywartą jest na nią, nacisk  $P$ . Wy-



Fig. 202

starczy belkę podzielić sobie na 4 części i wziąć jedną pod uwagę; deformacja tej czwartej części będzie stanowił analogon do belki wmurowanej jednym

końcem w ścianę. Wychylenie środka belki wmurowanej oboma końcami będzie, jak łatwo widzieć:

$$\eta_{\frac{l}{2}} = 2 \frac{2P(\frac{l}{4})^3}{E b^3 c} = \frac{P l^3}{16 E b^3 c}.$$

Jest to już 64 część wychylenia belki jednym końcem wmurowanej.

7. W dotychczasowych rozważaniach deformacji belki dwoma końcami podpartej lub utwierdzonej sprawa była ułatwiona spowodu symetrii. Jak jednak postąpić w ogólnym wypadku gdy na belkę podpartą działa

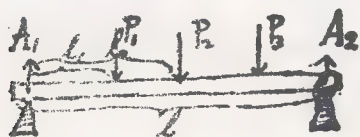


Fig. 203

kilka sił jak być może roznieśc-

nych? System sił  $P_1, P_2, P_3$  -- równowagę siły podparcia  $A_1, A_2$ . Będzie mianowicie:

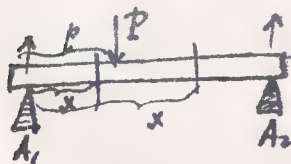
$$A_1 + A_2 = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

Muszą się nadto równoważyć momenty. Chcąc to powie-  
dzenie nasze zapisać matematycznie, obróćmy os' ob-  
rotu np w O, odległości zaś zaczepienia sił  $P_1, P_2, \dots$   
od  $A_1$  oznaczymy  $l_1, l_2, \dots$ , długość zaś całej belki  $l$ . Będzie:

$$A_2 l = P_1 (l - l_1) + P_2 (l - l_2) + P_3 (l - l_3) + \dots$$

Kombinując te dwa równania możemy obliczyć siły  $A_1$   
i  $A_2$ .

Weźmy u tym celu przykład, iż jedna tylko siła  $P$  za-  
czepia w dowolnym punkcie belki. Będzie:



$$\begin{array}{l|l} A_1 + A_2 = P & A_2 = \frac{Px}{l} \\ A_2 l = Px & A_1 = P(1 - \frac{x}{l}) \end{array}$$

Fig 204.

Znamy tak już siły. jaka bę-  
dzie deformacja? Wybierzmy sobie belkę w jakichś punk-  
cie  $x$  odciętą. Jakie momenty trzeba przyczepić, aby się belka

nie odłamata? Będą one

$$M_x = A_1 x \quad \text{lub} \quad M_x = A_1 x - P(x-p)$$

zależni od tego, który punkt bierzemy pod uwagę, czy po lewej czy po prawej stronie siły  $P$ . W każdym razie ważne będzie wyrażenie:

$$M_x = E \Theta \frac{d^2 \eta}{dx^2}$$

W pierwszym razie dostajemy stąd:

$$E \Theta \eta = A_1 \frac{x^3}{6} + \alpha x + \beta$$

w drugim:

$$E \Theta \eta = A_1 \frac{x^3}{6} - P \frac{x^3}{6} + P p \frac{x^2}{2} + \alpha' x + \beta'$$

Oba te wyrażenia nie są od siebie niezależne, albowiem dla  $x=p$  musi być:  $\eta = \eta'$ ,  $\frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta'}{dx}$ .

$$\frac{d\eta}{dx} E \Theta = \frac{A_1 x^2}{2} + \alpha \quad ; \quad \frac{d\eta'}{dx} E \Theta = \frac{A_1 x^2}{2} - \frac{P x^2}{2} + P p x + \alpha'$$

Kładąc więc  $x=p$ , dostaniemy:

$$\alpha = -\frac{P p^2}{2} + P p^2 + \alpha'$$

$$\alpha' = \alpha - \frac{P p^2}{2}$$

Iż  $\alpha'$  wyraża się przez  $\alpha$ . Podobnie dojdziemy do



wniosku, że  $\beta$  wywrze się przez  $\beta$  i  $\alpha$ . Tak więc liczba 4 stałych całkowania redukuje się do 2, bo pozostałe dwie wywrze się przez poprzednie. Teraz ostatecznie dadzą się wyrazić z warunków początkowych. Nie będziemy już w to szczegółowo wchodzić.

Zagadnienie to jest oczywiście ogólniejsze i daje zagadnienie poprzednie, gdy na belkę podpartą na końcach, działa siła zaczeplająca w środku jako wypadek szczególny. Jest ono ważne dla techników. (Meloboki: z mrowe, konstrukcyjne graficzne).

Ogólniejsze znów od tu rozpatrzonego zagadnienia jest następujące: znaleźć deformację belki w różnych punktach dowolnie podpartej na której również w różnych dowolnych punktach działają siły. Siły  $A_0, A_1, A_2, \dots$  jakie wywierają

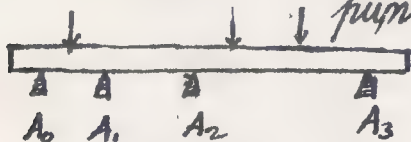


Fig 205

je podpory nie są znane a priori, bo kolera one od reakcji. Postępuje się w sposób analogiczny jak poprzednio. Widać się, że siły muszą być równe, momenty tak samo. Ale

to jeszcze nie wystarcza. Oblicza się krzywiznę i znajduje się warunki określone. Dodaje się tu nową warunek, że w miejscach podparcia wychylenia muszą być = 0. Zagadnienie to jest ważne dla trawers.

Zauważymy tu jeszcze, że ignorowanie na skrajowości

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

jakiegośmy niejednokrotnie używali w poprzednich przykładach jest tylko przybliżone. O ile bowiem mielibyśmy belkę bardzo grubą i bardzo krótką, to wtedy nastąpi wkręcanie się w sobie.



Fig 206

8. Wygięcie belki skutkiem siły działającej w kierunku długości belki. Z doświadczenia możemy wiedzieć, że



Fig 207

choćby nie istniała siła przegina-  
jąca tylko siła naciskająca  
w kierunku długości belki, bel-  
ka jednym końcem wmurowa-

na w ścianę z początku się skurczy nieco, a gdy nacisk  
jest znaczącojszy belka się wygnie. Chodzi o to, by to

ująć w formę matematyczną. Wyobraźmy sobie w tym celu belkę odciętą w jakimś miejscu. By była równowaga, trzeba przyczepić w tym miejscu siłę postępową, równą sile  $P$  i moment, równy istniejącemu już. Jeśli wychylenie końcowe nazwiemy  $\eta$ , zaś w punkcie  $x$  belki  $\eta_x$ , to moment wyrażający będzie:

$$M_x = P(\eta - \eta_x)$$

Krzywiwnę wyrażamy tedy:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{M_x}{E\Theta} = \frac{P(\eta - \eta_x)}{E\Theta}$$

Wobec  $\frac{1}{R_x} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \sim \frac{d^2y}{dx^2}$  w razie  $\frac{dy}{dx} \rightarrow 0$

mamy:  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{E\Theta} (\eta - \eta_x)$

Kładąc  $\eta - \eta_x = y$ , mamy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{P}{E\Theta} y$$

Tak dostaliśmy równanie różniczkowe określające kształt belki po deformacji. Jest to znany typ równania, spotykany przy waharole wogóle ruchu drgającym. Rozwią-





zamię tedy jego będzie:

$$y = a \sin(\alpha x + \varepsilon), \quad \alpha = \sqrt{\frac{P}{E\theta}}$$

$$y = a \sin\left(\varepsilon + x \sqrt{\frac{P}{E\theta}}\right).$$

stałe całkowania  $a$  i  $\varepsilon$ .

$$\eta = \eta_0 - a \sin\left(\varepsilon + x \sqrt{\frac{P}{E\theta}}\right)$$

Dla wyznaczenia stałych całkowania, zwracając się do warunków początkowych powiemy:

Dla  $x=0$ , ma być  $\eta=0$ ,  $\frac{d\eta}{dx}=0$ ; stąd

$$0 = \eta_0 - a \sin \varepsilon$$

oraz wobec  $\frac{d\eta}{dx} = -a \sqrt{\frac{P}{E\theta}} \cos(\varepsilon + x \sqrt{\frac{P}{E\theta}})$

$$0 = -a \sqrt{\frac{P}{E\theta}} \cos \varepsilon$$

Stąd wynika, że  $a$  musi być  $\neq 0$ ,  $\cos \varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ ,  
zatem  $a = \eta_0$ ; dostajemy więc:

$$\eta = a \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x \sqrt{\frac{P}{E\theta}}\right)\right)$$

czyli wreszcie

$$\eta = a \left(1 - \cos x \sqrt{\frac{P}{E\theta}}\right)$$

gdzie tylko amplituda  $a$  zostaje jednak nieokreślona.  
Pomijając to możemy zdać sobie sprawę z kształtu belki.

Dla  $x=0$ , jest  $y=0$ ; dla  $x=l$  jest  $y=a$ .

$$\cos l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} = 0$$

$$l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} = \frac{\pi}{2}$$

$$P = \frac{E\theta\pi^2}{4l^2}.$$

Cosinusoida przedstawi kształt belki w pierwszej jej ćwiertci. Będzie on więc taki, jak

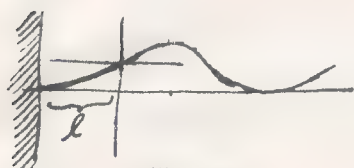


Fig 208

wskazuje ryc. 208. Krzywą od 0 do  $l$ . Będzie to więc część cosinusoidy.

Ostatnie równanie daje nam ciekawy rezultat; podaje ono bowiem siłę przy jakiej deformacja wspomniana belki nastąpi. Natomiast wychylenie końca belki a nie jest wcale określone. Rzecz ta wyjdzie z warunków fizycznych. Jak długo siła jest mniejsza od wartości granicznej, to nie wystarczy ona do wytworzenia cosinusoidy; belka kurczy się według prawa Younga. Gdy natoli siła wzrośnie do tej wartości, wtedy wygnie się, gdy zaś siła wzrośnie jeszcze cokolwiek ponad wartość granic-

na wygięcie staje się niekończącym się i w praktyce ra-  
bujemy zhamowanie belki.

Zarazcież można powyższemu rachunkowi to, że raka-  
damy, iż  $\frac{dy}{ds}$  jest znikomą małą; gdy się tego ogranicze-  
nia nie wprowadza dostaje się f. eliptyczna. Jest bowiem tak:

$$\frac{1}{R} = \frac{P}{EO} (\eta_1 - \eta)$$



Fig 208.

$$\frac{1}{R} = \frac{dy}{ds}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{P}{EO} (\eta_1 - \eta)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{P}{EO} \frac{d\eta}{ds} = -\frac{P}{EO} \sin \varphi.$$

Znowa mamy równanie takie samo jak dla wahań. Dla  
małych  $\varphi$  wracamy do poprzedniego wypadku przybliżonego.

Przy rozworzeniu powyższego przykładu mieliśmy po-  
raz pierwszy do czynienia z niestabilnością równowagi. Mo-  
żliwa jest deformacja taka, iż belka tylko się skurczy, a  
nie wygnie; gdy atoli siła przejdzie granicę równowaga  
taka jest niestabilna. W tych więc rzeczach trzeba rozważyć  
czy mamy do czynienia z równowagą stałą czy niestabilną.



Mozna podać masę przykładowo tego rodzaju: Gdy zginamy

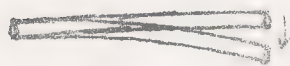


Fig 209



Fig 210

rurę (np. żelazo), to może ona zachować swój kształt kołowy, ale stała jest równowaga, gdy się sprężymy. Gdy skrzyćamy wałek kauczukowy, to możliwa jest rzecz, iż zachowa on kształt prosty, stała jednak jest równowaga, gdy wałek taki się skrzywi.

Przeobrażania nad stałością równowagi (Bryan) są bardzo trudne. Nie będziemy w to tutaj wchodzić. Wspomniemy tu jeszcze, nawisując rzecz do naszego przykładu, iż z kwestyą stałości zgodna się deformacja belki na którą działa siła w kierunku jej osi długości tylko w jednej ćwiartce. Nie można więc kreślić kosinusoidy w do-



Fig 211.

wodnej śłosci ćwiartek i mówić, że to przedstawia kształt zdeformowania

belki. Gdy się ma do czynienia z deformacją belki w murowanej oboma końcami w ścianę, które zbliżają

się do siebie powodują deformację oraz, to zgodnie ze stałością równowagi belka przyjmie kształt

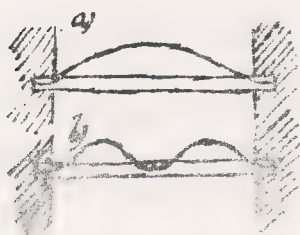


Fig 212.

Fig 212 a). Przyjęta belka Fig 212 b) nie ma już równowagi statycznej.

W związku z temi rozważaniami porożka.

je problem geofizyki powstawania gór foldowych skutkiem kurczenia się skorupy ziemskiej.



Fig 213.

Pozornie jest sprzeczność, bo dowodoby się, że ukształtowanie takie miałyby równowagę niestabilną.

Treba jednak zwrócić, że warunki tutaj są odmiennie. Jest to w rzeczywistości i czystość, według której góry zachowują się tak jakby to były bryły lodu pływające na wodzie. Gdy sobie tak rzecz wyobrażamy, to do znanych ciśnień dotężyć się będzie poprzez ciśnienie hydrostatyczne. Kiedy istotnie wykonujemy rachunki dochodzimy do wniosków, że ukształtowanie takie jak na Fig. 213 ma równowagę statyczną. Doświadczalnie to można stwierdzić skurczając warstwę żelatyny pływającej

na powierzchni styku.

9. Jaka będzie deformacja belki, gdy opieranie będzie my na niej, nacisk w sposób ciągły tj. jeśli na każdy cm przypadac będzie siła  $P_x$ . Rozważać będziemy tak samo

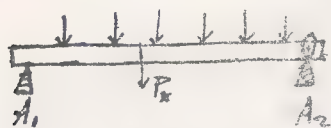


Fig 214.

jak w przykładzie 7. Będziemy więc, że muszą się równoważyć siły i momenty, że więc

$$A_1 + A_2 = \sum P_x$$

$$M_x = A_1 x - \sum P_x d_x (x - \xi)$$

czyli zastępując sumę przez całkę:

$$M_x = A_1 x - \int_0^x P_x (x - \xi) d\xi$$

ty. wobec  $M_x = \frac{E\theta}{R_x} = E\theta \frac{d^2 y}{dx^2}$

$$M_x = E\theta \frac{d^2 y}{dx^2} = A_1 x - \int_0^x P_x (x - \xi) d\xi$$

Stąd

$$\frac{dM_x}{dx} = A_1 - \cancel{\frac{P_x(x-\xi)}{\xi=x}} \int_{x=0}^x - \int_0^x P_x d\xi$$

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = - P_x$$

czyli

$$E\theta \frac{d^2 y}{dx^2} = - P_x$$

Jeśli w szczególności założymy  $P_x = \text{const}$ , co właściwie



wiezione będzie np. w tym razie, gdy na belkę o jednako-  
wym wzdłuż przekroju działą ciężkość, to

$$E \Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -q \delta$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{q \delta}{E \Theta}$$

$$y = -\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 - \frac{q \delta}{E \Theta} \frac{x^4}{4!}$$



Fig 215

Dla skrócenia statych połączmy  
np. warunki początkowe, że dla  
 $x=0, x=l$  musi być  $y=0, \frac{dy}{dx}=0$ .

Dostaniemy tak 4 równania; to wystarczy już do wy-  
znaczenia krzywej. Krzywa ta jest 4<sup>to</sup> stopnia.

Gdybyśmy rozważali deformację płyty sprężystej;  
na którą działają siły w kierunku osi  $y$ :  $Y_x$ , dostalibyś-  
my na jej kształt równanie:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) = A Y_x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^4} = A Y_x$$

Jest to analogon do zagadnienia poprzedniego.  
Gdyby rozmięśnienie się nie było tutaj zależne od osi  $x$ , to

to równanie redukowałoby się na poprzednie. Wskazywa-  
napotykanym miarą to równanie. Kształt błon zależy  
od różnic różniczkowych 2<sup>go</sup> rzędu.

Imię jeszcze porywką ciekawą rozwiązany w swojej  
rozprawie teoretycznej Herza dotyczy deformacji wy-  
wołanej przez ściśnięcie dwu kół. Kół się  
stosują, a promień ściśnięcia różni-  
cia brzośi



Fig. 216.

$$R \sim \sqrt{p \cdot r}$$

Jeszcze jeden szczegół podmieśmmy tutaj:  
Teoryę sprężystości nazywają miarą  
technicę naukę o wytrzymałości Festigkeitslehre. Tur-  
zek między temi rzeczami jest dość luźny. Najwa-  
żniem w tej nauce uwarunek teoryi sprężystości, ale nie  
polega się na tem i brakuje się wytrzymałości 4-10 razy  
większą.

Problema wytrzymałości jest dotychczas nierozwiązany.  
Wp. sądownie przetwarzanie belki nastąpi wtedy, gdy siła cią-  
gnąca przekroczy pewną granicę. Byłoby to o tyle słuszne

silby istniałyby wyłączenie siły ciągnącej belkę podłużnie, ale nie w wypadkach gdzie współistnieją, różne inne siły. Inna hipoteza, że miarodajną dla wytrzymałości jest największe naprężenie ciągnące w danym punkcie jest niewystarczająca.

Toscano odnosi się do ciśnienia. Ciśnienie jest we wszystkich stronach jednakowe w materiale jednorodnym, to nie nastąpi ani pęknięcie ani złamanie.

Inne kryterium wytrzymałości podał Concelot, Saint-Venant, Grashof opierające się na rozwarciu największego wygięcia. Jeśli mianowicie wygięcie przekroczy pewną wartość maksymalną, to wtedy następuje przerwanie. Lecz natrafia się tu znowu na trudności. Łatwiej od dźwigni bo już od czasu Coulomba postawiono inną hipotezę powiadającą, że przerwa przegłodzi: złamanie zależy od dwóch napięć istniejących w danym punkcie maksymalnego i minimalnego. Wtedy powiadać się: Złamanie nastąpi wtedy, jeśli różnica napięć największych i najmniejszych w danym punkcie przekroczy pewną



granicę. Doświadczenia w tym względzie czynił Biot. Stwierdził on, że przerwanie słupa słabymy następuje pod równomiernem ciśnieniem hydrostatycznym przy tem samem obciążeniu jak na powietrzu wolnem. Willmors czyniąc próby nad przerwaniem drutów aluminiowych stwierdził, że przerwanie ich na powietrzu następuje przy obciążeniu  $156 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ , zaś przy ciśnieniu 400 atmosfer tj.  $7 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  przy obciążeniu  $138 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ . Zatem nie bezwzględna wartość siły Y, tylko obciążenie tj. różnica siły ciągnącej w kierunku Y i siły poprzecznej (ciśnienia hydrostatycznego) była miarodajną dla złamania.

Deformacja wogóle według Karmanna może się odbywać w dwa sposoby: albo ciarunka cięła, dorażając przesunięcia, albo zostaje przekształcone. Teoria ta zbliża się najwięcej do teorii Coulomba powiadającej, że złamanie następuje wtedy, gdy największa amiana kątów przekroczy pewną wartość maksymalną lub gdy ścinanie przekroczy pewne maximum. Obecnie wspomniany, że również Mohr podał kryterium wytrzymałości

nie mające stoli wysekości nad poprzeczniciem. Nazywać teorię sprężystości nauką wytrzymałości jest, jak już z tego wrystkiego wynika, niewłaściwem, bo nie mamy jeszcze dotąd podstaw dla określenia wytrzymałości.

Literatura teoryi sprężystości: Föppl: Technische Mechanik I. III. V, Jewinewicz, Kümman, Love (klasyczne).

KONIEC.

## = Spis rzeczy =

	Str.
Wstęp. Historyczne uwagi. Zwiady mechaniki	1-5
Rachunek wektorowy	6-29
Kinematyka punktu	29-41
<u>Dynamika punktu</u>	41-111
Zasady mechaniczne	41-47
Ruch prostoliniowy str. 47, Dynamika punktu swobodnego: 50. Dynamika punktu nieswobodnego 85	
Zasada d'Alemberta	89
<u>Mechanika systemu punktów</u>	111-132
Zasada zachowania energii mech: 117. Ruch środka masy 120, Zasada zachowania momentów wyć 122	
<u>Mechanika ciał sztywnych</u>	132-219
Równania ruchu ciał sztywnych 136, Rozważania syntetyczne 140, Rozważania równań ruchu 147, Obliczenie środka masy i momentu bezwładności 154, Twierdzenie Steinera 159, Elipsoida bezwładności 162, Momenty dwiayczne 174, Strona mechaniczna ruchu obrotowego	



## II.

str 179, Równania Eulera str 183, Ruch kropki str 200.	str.
Równania Lagrange'a .....	219
Zasada Hamiltona .....	237
Ruch względny .....	256
<u>Mechanika ciał sprężystych</u> .....	283-358.
Deformacje kostki elementarnej str 291. Deformacje	
ciała słowdnego kostatku 304, 12 równań str 314, 316,	
318, statyki str 320. Zastosowania teorii 321-358.	

---

Wydawnictwo Kłtka matematyczno-fizycznego w Łwowie.

		Cena w łotkach i groszach	
Prof. W. Sierpińskiego.	Teorya liczb niewymiernych	160 K	2 K
	Teorya nieskończonych szeregów i ciągów	220 "	270 "
	Teorya liczb zespolonych	040 "	050 "
	Teorya arytmetyczna kwaternionów	080 "	080 "
	Teorya liczb	5 "	650 "
	Teorya mnogości	280 "	320 "
	Wstęp do teoryi funkcyi	070 "	080 "
	Analiza wyraża	540 "	630 "
Prof. Smoluchowskiego	Rachunek sumacyjny	160 "	190 "
	Zastosowanie teoryi mnogości do Analizy	430 "	5 "
	Elektryczność i magnetyzm	8 "	10 "
	Nowe teorye elektryczności	6 "	750 "
	Teorya kinetyczna gazu	5 "	7 "
	Termodynamika	8 "	10 "
	Mechanika	630 "	9 "



















